SACHSEN-ANHALT

Landesinstitut für Schulqualität und Lehrerbildung (LISA)

ANREGUNGEN ZUR SCHUL- UND UNTERRICHTSENTWICKLUNG 04/2018

VERGLEICHSARBEIT MATHEMATIK
SCHULJAHRGANG 8 – TESTHEFT 2
ERGEBNISSE IM ÜBERBLICK

Schuljahr 2017/2018

Grundschule
Sekundarschule
Gemeinschaftsschule
Gesamtschule
Gymnasium
Fachgymnasium
Förderschule
Berufsbildende Schule

ALLGEMEINES

In Sachsen-Anhalt wurden die unter der Federführung des Instituts zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen (IQB) entwickelten Vergleichsarbeiten im Schuljahrgang 8 (VERA- 8) im Schuljahr 2017/2018 verbindlich im Fach Mathematik durchgeführt. Das IQB stellte dafür zwei Testhefte mit unterschiedlicher Gesamtschwierigkeit zur Verfügung. An den Gymnasien bzw. dem gymnasialen Teil der kooperativen Gesamtschule und an zwei Gemeinschaftsschulen des Landes kam das Testheft 2 zum Einsatz. Die Arbeitszeit betrug 90 Minuten (10 Minuten Vorbereitungszeit, 80 Minuten Testzeit). Zugelassene Hilfsmittel waren Zeichengeräte (Zirkel, Geodreieck) und Taschenrechner.
Die Testdurchführung und -auswertung erfolgte durch die jeweils unterrichtende Lehrkraft. Die Rückmeldung der schulbezogen aggregierten Ergebnisse geschah in einem Online-Verfahren. Grundlage für die vorliegenden Übersichten sind die Ergebnisse von 5.974 Schülerinnen und Schülern aus 84 Schulen.

Den in VERA-8 Mathematik vorkommenden Aufgaben liegt das integrierte Kompetenzstufenmodell (Globalmodell, vgl. /2/) im Fach Mathematik zugrunde. Es werden fünf Kompetenzstufen (KS) unterschieden (vgl. Tab. 1).

KS	Standards für den Mittleren Schulabschluss
5	**Optimalstandard:** Kompetenzen, die die Erwartungen der Bildungsstandards übertreffen
4	**Regelstandard plus:** Kompetenzen, die über die grundlegenden Zielsetzungen der Bildungsstandards hinaus gehen
3	**Regelstandard:** durchschnittliche Erwartung an die Kompetenzen
2	**Mindeststandard:** Minimum an Kompetenzen
1	**unter Mindeststandard**

Tab. 1: Kompetenzstufen der Bildungsstandards

ERGEBNISSE IM ÜBERBLICK

Die Aufgabe mit dem höchsten Landesmittelwert des Testheftes 2 repräsentiert erwartungsgemäß die Kompetenzstufe 1 (Aufg. 1.1: AFB I, 92 %). Die Landesmittelwerte zu den im Regelstandard verorteten Aufgaben schwanken zwischen 43 % (Aufg. 10.1: AFB II) und 67 % (Aufg. 5.1: AFB I). Hervorzuheben ist, dass im Mittel 15 % bis 47 % der Schülerschaft Anforderungen bewältigten, die dem Optimalstandard entsprechen (Aufg. 9.1, 11.1 und 11.2).
In den Anforderungsbereichen treten folgende Schwankungen in den Landesmittelwerten auf: AFB I: 32 % bis 92 %, AFB II: 15 % bis 83 %, AFB III: 18 % bis 64 %. Niedrige und hohe Erfüllungsprozentsätze sind also in allen Anforderungsbereichen zu finden.

Ergebnisse zu „Zahlen und Größen“

In einer im Optimalstandard lokalisierten Aufgabe, in der kombinatorische Überlegungen angewendet werden mussten, um die Anzahl der verschiedenen dreistelligen Zahlen aus den Ziffern 1 bis 6 anzugeben, wird mit 15 % der geringste Landesmittelwert erreicht (Aufg. 11.1: AFB II).
Im Hinblick auf diese Aufgabe sind der Abbildung 1 noch mehr Informationen entnehmbar: Das gefärbte Segment des Perzentilbandes gibt an, dass die Hälfte aller erfassten Schulen Erfüllungsprozentsätze von 6 % bis 20 % haben. Unter dem Segment liegt ein Fünftel der Schülerschaft mit Erfüllungsprozentsätzen von 3 % bis 6 % und oberhalb des Segments ein Fünftel der Schülerschaft mit Erfüllungspro-

zentsätzen von 20 % bis 32 %. Das Perzentilband verdeutlicht, dass die Schwankung im unteren Bereich kleiner als im oberen Bereich ist. Offenbar ist die Schülerschaft im unteren Bereich vergleichsweise homogen.
Die Aufgaben 2.1 bis 2.4 erforderten von den Schülerinnen und Schülern den Umgang mit Primzahlen. Diese vier Aufgaben bilden am Thema „Primzahlen“ die Kompetenzstufen 2 bis 5 in unterschiedlichen Anforderungsbereichen ab. Die Anforderung, unter vier Zahlen eine Primzahl zu finden, erfüllten 85 % der Schülerschaft (Aufg. 2.1: AFB I, KS 2). 63 % der Schülerschaft lösten eine im Regelstandard verortete Aufgabe korrekt und begründeten, dass es außer der Zahl 2 keine weitere gerade Primzahl gibt (Aufg. 2.2: AFB II). Immerhin konnten noch 41 % der Schülerschaft Primzahlenzwillinge angeben und damit eine Anforderung im Regelstandard plus bewältigen (Aufg. 2.3: AFB I). Ein Gegenbeispiel zu einer vermeintlichen Regel zum Finden von Primzahlen gaben 18 % der Schülerschaft richtig an (Aufg. 2.4: AFB III, KS 5). Interessant ist der Befund, dass die Aufgaben 2.1 und 2.3 den Anforderungsbereich I repräsentieren, obgleich sie unterschiedliche Kompetenzstufen abbilden. Worin liegt der Unterschied? Kompetenzstufen beschreiben konkrete Anforderungen, die Personen bei der Ausprägung einer Kompetenz bewältigen können. Sie beruhen auf empirischen Befunden. Anforderungsbereiche fußen hingegen auf didaktisch-fachlichen Überlegungen, die drei Gruppen von kognitiven Anforderungen beschreiben. Ziel des Mathematikunterrichts muss es sein, zu jedem Inhaltsbereich die drei Anforderungsbereiche für die verschiedenen Kompetenzniveaus ausgewogen zu thematisieren.

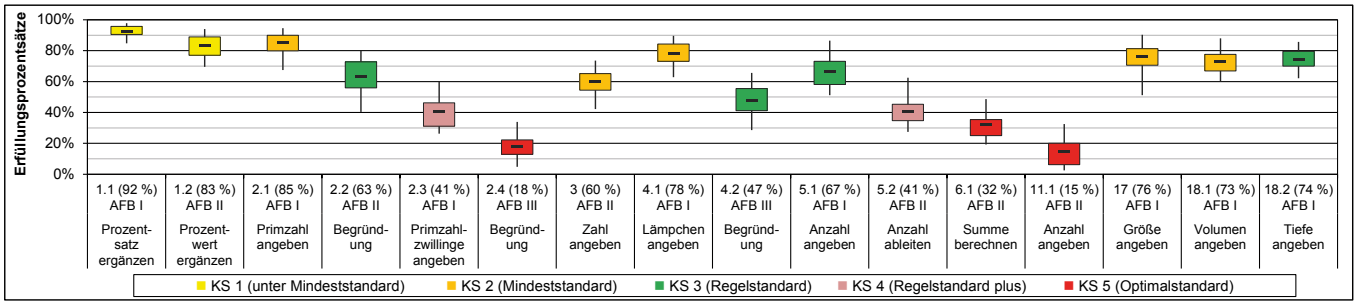

Abb. 1: Ergebnisse im Inhaltsbereich „Zahlen und Größen“ (90 %-Perzentilbänder und Landesmittelwerte)

Ergebnisse zu „Daten und Zufall“

Exemplarisch werden aufgrund der Befunde die Aufgaben betrachtet, die die Anforderungen der Kompetenzstufe 5 repräsentieren (Aufg. 9.1, 9.2 und 11.2). Die Landesmittelwerte der Aufgaben 9.1 und 9.2 unterscheiden sehr deutlich von dem der Aufgabe 11.2. In den Aufgaben 9.1 und 9.2 konnten die Schülerinnen und Schüler das Laplace-Modell zur Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten verwenden. Für die erfolgreiche Bearbeitung der Aufgabe 11.2 mussten heuristische Hilfsmittel, Strategien und Prinzipien angewendet werden, wenn mehrstufige Zufallsversuche zum Zeitpunkt der Testung noch nicht Unterrichtsgegenstand waren. Die Perzentilbänder zu den Aufgaben 9.1 und 9.2 zeigen, dass die Schwankung der Erfüllungsprozentsätze jeweils größer ist als in der Aufgabe 11.2, d. h. die Schülerschaft weniger homogen verteilt ist. Ein vergleichsweise niedriger Landesmittelwert von 43 % wird bei der Angabe der Wahrscheinlichkeit dafür erreicht, dass beim einmaligen Drehen eines Glücksrades die Zahl 2 erscheint (Aufg. 10.1: AFB II, KS 3).

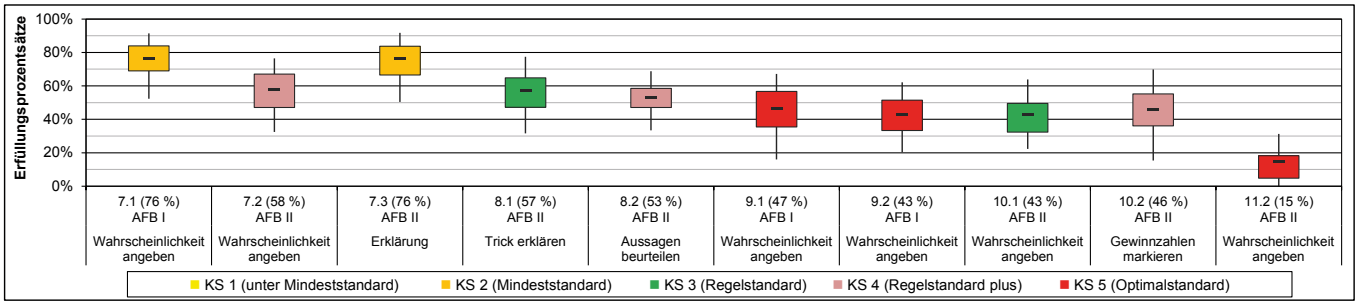

Abb. 2: Ergebnisse im Inhaltsbereich „Daten und Zufall“ (90 %-Perzentilbänder und Landesmittelwerte)

Ergebnisse zu „Zuordnungen und Funktionen“

Bei der Angabe der Länge des Bremsweges zu einer bestimmten Geschwindigkeit wurde der höchste Landesmittelwert von 91 % im diesem Inhaltsbereich erreicht (Aufg. 12.1: AFB I, KS 1). Im Unterschied zur Berechnung der Summe der natürlichen Zahlen von 1 bis 151 mithilfe des Tricks von C. F. Gauß (vgl. Abb. 1, Aufg. 6.1: AFB II, KS 5, 32 %) gelang es augenscheinlich einem geringeren Teil der Schülerinnen und Schülern, einen funktionalen Zusammenhang zwischen einer Menge an Zahlen und der Summe dieser Zahlen in Form eines Terms darzustellen (Aufg. 6.2: AFB III, KS 5), obgleich beide Aufgaben Anforderungen im Optimalstandard repräsentieren.

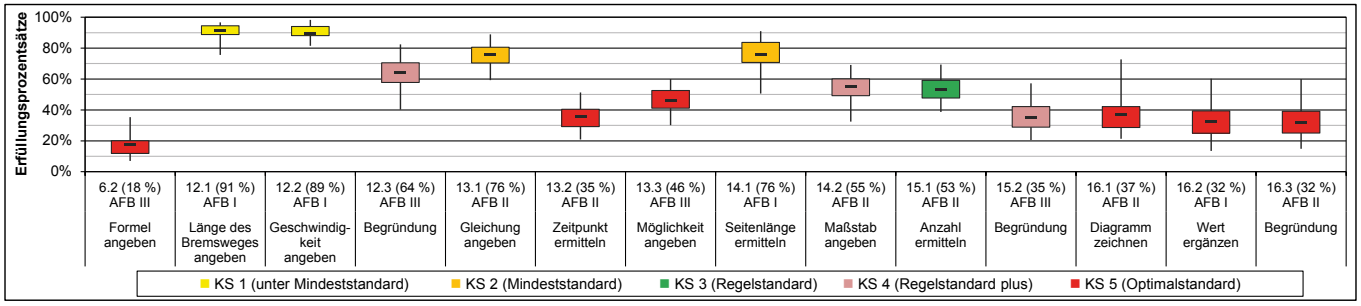

Abb. 3: Ergebnisse im Inhaltsbereich „Zuordnungen und Funktionen“ (90 %-Perzentilbänder und Landesmittelwerte)

Ergebnisse zu „Raum und Form“

In diesem Inhaltsbereich entsprechen fünf von sieben Aufgaben den Anforderungen im Optimalstandard bzw. dem Regelstandard plus (vgl. Abb. 4). Die Landesmittelwerte reichen von 20 % (Aufg. 18.3: AFB II, KS 4 und Aufg. 19: AFB II, KS 5) bis 60 % (Aufg. 20: AFB II, KS 3).
55 % der Schülerschaft konnten gedanklich mit dem aus Kugeln zusammengesetzten Körper operieren (Aufg. 21.1: AFB I, KS 3). In einer ebenfalls im Regelstandard verorteten Aufgabe mit einem Landesmittelwert von 60 % mussten die Schülerinnen und Schüler die korrekte Ansicht eines Körpers identifizieren (Aufg. 20). Beim direkten Vergleich der Perzentilbänder zu diesen Aufgaben ist erkennbar, dass die Abweichung in der Aufgabe 20 deutlich größer als in der Aufgabe 21.1 ist. Die dem Optimalstandard zugehörige Anforderung, die Anzahl der Magnetkugeln der Außenfläche des Magnetwürfels anzugeben, erfüllten immerhin 24 %.

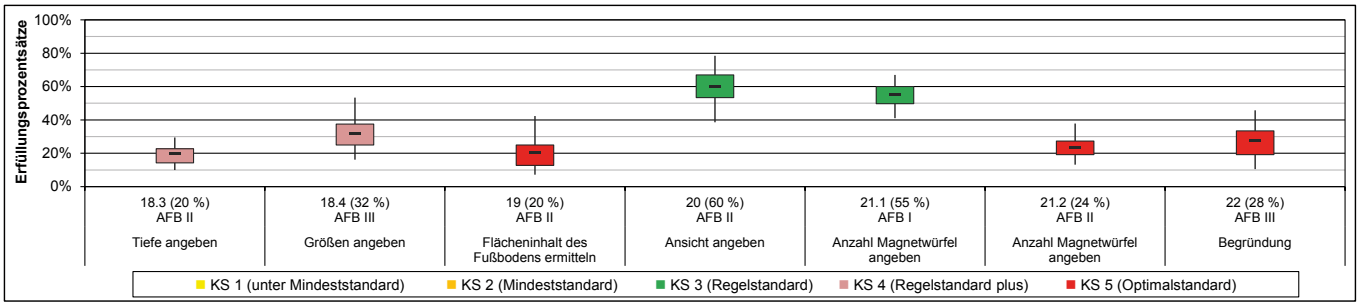

Abb. 4: Ergebnisse im Inhaltsbereich „Raum und Form“ (90 %-Perzentilbänder und Landesmittelwerte)

HINWEISE ZUR WEITERARBEIT

Ein erster Schritt bei der Analyse der klassen- bzw. schulbezogenen Ergebnisse ist die Verortung dieser in die Landesergebnisse unter Zuhilfenahme der Perzentilbänder. Damit ist ein kriterialer Vergleich von Landes-, Schul- und Klassenergebnissen mit den Erwartungen der Bildungsstandards möglich. Für VERA-8 Mathematik bilden die Anforderungen der Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss das Vergleichskriterium. Denn diese legen Kompetenzen fest, die von Schülerinnen und Schülern bis zu einem bestimmten Zeitpunkt ihrer Bildungsbiografie erworben werden sollen.

In einem zweiten Schritt können die bereits angedeuteten Befunde auf Landesebene Ausgangspunkte für weitergehende Untersuchungen sein. Im Folgenden werden am Beispiel bereits betrachteter Aufgaben didaktische Anregungen für die Unterrichtsarbeit abgeleitet.

Multiperspektivität auf Primzahlen

Im Zusammenhang mit den angesprochenen Aufgaben 2.1 bis 2.4 ist es im Mathematikunterricht erforderlich, dass unterschiedliche Sichtweisen auf Primzahlen thematisiert werden.
Es ist für ein vollständiges Verständnis von Primzahlen entscheidend, dass alle Charakteristika sowie deren Vernetzung für ein möglichst umfangreiches Verständnis der Primzahlen wichtig sind. So kann die Primfaktorzerlegung im Unterricht zum Beispiel durch spielerische mathematische Erkundungen erarbeitet werden (vgl. /3/).

Probleme mathematisch lösen durch geistige Beweglichkeit

In der Aufgabe 10.1 waren die Schülerinnen und Schüler mit der Hürde konfrontiert, dass das zur Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten zugrundeliegende Glücksrad unterschiedlich große Sektoren hatte. Dadurch sind die Ergebnisse beim Drehen des Glücksrades nicht gleichwahrscheinlich. Um die Anforderung dieser Aufgabe dennoch erfolgreich bewältigen zu können, ist geistige Beweglichkeit erforderlich. Dazu zählen (vgl. /4/):

- Reduktion: Reduzieren des Problems auf das Wesentliche,
- Reversibilität: Umkehren bzw. rückwärts Nachvollziehen von Gedankengängen,
- Aspektbetrachtung: Beachten bzw. Festhalten eines bestimmten Aspekts, d. h. eine Idee konsequent weiterverfolgen,
- Aspektwechsel: Betrachten des Problems unter verschiedenen Aspekten bzw. aus unterschiedlichen Perspektiven.

Die Kompetenz *Probleme mathematisch lösen* kann unter anderem über das Ausbilden von Teilhandlungen des Problemlösens in Verbindung mit Heurismen erworben werden.

Kommunizieren im Mathematikunterricht
In der Aufgabe 6.2 war die Kompetenz mathematisch kommunizieren gefordert. Dies beinhaltet neben der Informationsentnahme aus einer komplexen Aufgabenstellung auch das Darlegen eines Lösungsweges. Um diagnostisch wirksam zu werden, bedarf es einer Analyse von Schülerlösungen, um zu prüfen, ob

- das sinnentnehmende Erfassen der Informationen aus dem Aufgabentext,
- die Abstrahierung oder
- das verständliche Darstellen von Überlegungen, Lösungswegen bzw. Ergebnissen

herausfordernd ist. Eine rein verbale Beschreibung von Lösungswegen bietet im Unterricht Anlass dazu, den Gebrauch der Fachsprache zu üben.

Einsatz von Kopfgeometrie-Aufgaben
Ein basaler Darstellungswechsel von einem Körper zu verschiedenen Ansichten dieses Körpers war in der Aufgabe 20 nötig. Diese Aufgabe zielte auf Raumvorstellungen und räumliches Denken der Schülerinnen und Schüler ab. Studien deuten darauf hin, dass das räumliche Vorstellungsvermögen trainiert werden kann. Vermittels sogenannter Kopfgeometrie-Aufgaben werden Probleme lediglich im Kopf gelöst. In Abhängigkeit der individuellen Voraussetzungen der Schülerinnen und Schüler können diese in unterschiedlichen Stufen bearbeitet werden (z. B. noch mit Hilfsmitteln, gänzlich ohne Hilfsmittel). Einfache und schnelle Kopfgeometrie-Aufgaben können zum Beispiel mit dem Overhead-Projektor oder über eine Dokumentenkamera erzeugt werden, indem man geometrische Körper auf unterschiedliche Weise projiziert /5/.

Diagnostisch wirksam werden
Durch die besondere Form der Auswertung der Aufgaben werden Zwischenschritte oder Teillösungen nicht gewertet. Demnach kann im Vergleich zu einem differenzierten Bewertungsschema anhand der Erfüllungsprozentsätze oder Perzentilbänder nicht eruiert werden, welche Auffälligkeiten es hinsichtlich der aufgetretenen Fehler gibt. Im Zusammenhang mit Lösungen von Lernenden ist es sinnvoll, differenziert Stärken und Schwächen der Schülerschaft in Bezug auf einzelne Inhalte zu untersuchen. Die folgenden Ausführungen illustrieren dies am Beispiel der Aufgabe 13.2.

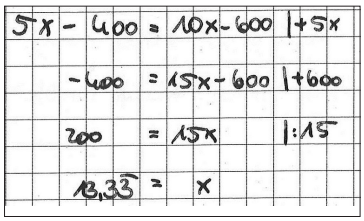

Abb. 5: Schülerlösung

Die Schülerlösung (vgl. Abb. 5) dokumentiert einen Lösungsweg über eine Gleichung und wurde mit „falsch“ bewertet, da die Ermittlung des Zeitpunktes fehlerbehaftet ist. Welche Kompetenzen können geschlussfolgert werden? Die Schülerlösung deutet darauf hin, dass die Kompetenz der Informationsentnahme hinreichend ausgeprägt ist. Reserven gibt es bei der Informationsverarbeitung, da die angegebenen Modelle
$y = 5x – 400$ für den ersten Behälter und $y = 10x – 600$ für den zweiten Behälter im Sachzusammenhang nicht sinnvoll sind, obgleich sie auch zum richtigen Ergebnis führen. Nach der Transformation in eine symbolsprachliche Darstellung wird nicht beachtet, dass nun Wasser in den Tank laufen würde, d. h. eine richtige Gleichung ist $400 – x = 600 – 10x$. Überprüft werden kann die Ausprägung der Kompetenz durch Aufgaben, in denen

- mathematischen Modellen Anwendungssituationen zugeordnet oder
- fachsprachliche und umgangssprachliche Formulierungen sachgerecht in mathematische Ausdrücke übersetzt und mathematische Ausdrücke verbalisiert

werden. Reserven gibt es bei der Schülerlösung ebenso beim Lösen eines mathematischen Problems, da zum einen das ausgewählte Lösungsverfahren fehlerbehaftet ist und zum anderen das erhaltene Ergebnis nicht kontrolliert wird. Unabhängig von dem hier dargelegten Lösungsweg sollten weitere Wege im Mathematikunterricht thematisiert werden, wie zum Beispiel zeichnerische Lösungen. Denkbar ist ebenso, Schülerlösungen zum Gegenstand des Unterrichts zu machen, um über unterschiedliche Wege zu reflektieren.

Fortbildungsangebote zur Unterstützung nutzen
Zur Unterstützung der Weiterarbeit der schulischen Fachschaften werden im Schuljahr 2018/2019 Fortbildungen zur Kompetenzorientierung und Aufgabenkultur im Fach Mathematik angeboten. Sie sind über den Fortbildungskatalog auf dem Landesbildungsserver zu finden. Entsprechende Bedarfe ergeben sich aus der Analyse der klassen- bzw. schulbezogenen Ergebnisse. Im schulischen Fortbildungsplan werden dann die mittelfristig geplanten Fortbildungsschwerpunkte festgelegt.

Quellen:
/1/ Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (Hrsg.) (2003): Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss. Beschluss vom 4.12.2003. Berlin.

/2/ Institut für Qualitätsentwicklung im Bildungswesen (Hrsg.) (2012): Kompetenzstufenmodell zu den Bildungsstandards für den Hauptschulabschluss und den Mittleren Schulabschluss im Fach Mathematik. Stand: 15. Februar 2012. Berlin.

/3/ Prediger, S./Dirks, T./Kersting, J. (2009): Wer zerlegt zuletzt. Praxis Mathematik in der Schule. 51 (25). S. 10 - 14.

/4/ Bruder, R./Collet, C. (2011): Probleme lernen im Mathematikunterricht.

/5/ Maier, P. (1999). Räumliches Vorstellungsvermögen. S. 81

Impressum
Herausgeber: Landesinstitut für Schulqualität und Lehrerbildung Sachsen-Anhalt (LISA)
Autor: Thomas Viehweg
Sie dürfen das Material weiterverbreiten, bearbeiten, verändern und erweitern. Sie müssen den Urheber nennen und kennzeichnen, welche Änderungen sie vorgenommen haben. Sie müssen das Material und Veränderungen unter den gleichen Lizenzbedingungen weitergeben. Die Rechte für Fotos, Abbildungen und Zitate für Quellen Dritter bleiben bei den jeweiligen Rechteinhabern.

Alle bisher erschienenen Informationsblätter finden Sie auch auf dem Bildungsserver Sachsen-Anhalt unter: www.bildung-lsa.de/lisa-kurz-texte