Niveaubestimmende Aufgaben für die Sekundarschule

SACHSEN-ANHALT

Landesinstitut für Schulqualität
und Lehrerbildung (LISA)

Mathematik

Die niveaubestimmenden Aufgaben sind Bestandteil des Lehrplankonzeptes für die Sekundarschule.

An der Erarbeitung der niveaubestimmenden Aufgaben haben mitgewirkt:

Beier, Erika	Reinsdorf
Biallas, Ingrid	Magdeburg
Dr. Eid, Wolfram	Magdeburg (fachwissenschaftliche Beratung)
Hesse, Birgit	Halberstadt
Manzei, Dieter	Stendal
Dr. habil. Pruzina, Manfred	Halle (Leitung der Implementationsfachgruppe)

Herausgeber im Auftrag des Kultusministeriums des Landes Sachsen-Anhalt:

Landesinstitut für Schulqualität und
Lehrerbildung Sachsen-Anhalt (LISA)
Riebeckplatz 9
06110 Halle (Saale)

www.bildung-lsa.de

Druck: SALZLAND DRUCK Staßfurt

Halle 2012

Inhaltsverzeichnis

Seite

1 Funktionen und Anlage der niveaubestimmenden Aufgaben

1.1 Zur Konzeption

Die Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Hauptschulabschluss sowie für den Mittleren Schulabschluss beschreiben die durch die Lernenden zu erwerbenden mathematischen Kompetenzen zum Ende der Schulzeit. Ein wesentlicher Bestandteil der Bildungsstandards sind kommentierte Aufgaben, die die qualitativen Forderungen und Zielvorgaben der Bildungsstandards exemplarisch verdeutlichen.
Diese Vorgehensweise wird mit den *niveaubestimmenden Aufgaben* für den Lehrplan aufgegriffen. Die vorliegenden niveaubestimmenden Aufgaben widerspiegeln die konsequente Kompetenzorientierung des Lehrplans der Sekundarschule - Fach MATHEMATIK. Dies geschieht dadurch, dass für die Doppeljahrgänge die laut Lehrplan zu erreichende Kompetenzentwicklung in Form von Aufgaben kompetenzbereichübergreifend konkretisiert wird.

Die niveaubestimmenden Aufgaben erfüllen mehrere **Funktionen**:

- Sie sind ein Bindeglied zwischen Lehrplanforderungen und Unterricht und damit eine Hilfe für die Interpretation des Lehrplans.
- Sie stellen eine Konkretisierung der Kompetenzentwicklung bezogen auf Doppeljahrgänge und ausgewählte Schwerpunkte dar.
- Sie regen eine „kompetenzorientierte“ Aufgabenkultur an. Auf analoge Weise können ähnliche oder weitere Aufgaben durch Variation oder Transfer entwickelt werden.
- Sie geben Anhaltspunkte für Lernkontrollen und bilden damit eine Grundlage für die Analyse von Schülerleistungen sowie für schulinterne Evaluationen.

Eine kompetenzorientierte Aufgabenkultur zielt vor allem auf inhaltliches Verständnis, flexibles Anwendenkönnen und auf Vernetzung von Wissensbeständen, und nicht allein oder vordergründig auf das Trainieren von Fertigkeiten oder auf das mehr oder weniger formale Vermitteln von Wissen. Sie erfasst in ihrer Gesamtheit daher ein relativ umfangreiches Kompetenzspektrum sowohl in der „Breite“ (allgemeine mathematische Kompetenzen, inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen) als auch in der „Tiefe“ (differenzierte Anforderungen im Sinne der drei Anforderungsbereiche).

Die Aufgaben sind integrativ konzipiert. Das Lösen der niveaubestimmenden Aufgaben verlangt von den Schülerinnen und Schülern, sowohl **inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen** aus den Inhaltsbereichen

Zahlen und Größen

Raum und Form

Zuordnungen und Funktionen

Daten und Zufall

als auch **allgemeine mathematische Kompetenzen** aus den Kompetenzbereichen

P Probleme mathematisch lösen

M Mathematisch modellieren

A Mathematisch argumentieren und kommunizieren

D Mathematische Darstellungen und Symbole verwenden

zu aktivieren.

Die Aufgaben weisen auch eine Differenzierung in Bezug auf die **Anforderungsbereiche** (kurz: AFB) auf. In der Praxis hat sich das folgende dreistufige Modell bewährt.

Anforderungsbereich I: **„Reproduktionsleistungen"**

Wiedergabe oder direkte Anwendung von grundlegenden Begriffen, Sätzen und Verfahren in geübten Zusammenhängen

Anforderungsbereich II: **„Reorganisationsleistungen, Transferleistungen"**

Bearbeiten bekannter Sachverhalte, wobei ein Verknüpfen verschiedener Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten erforderlich ist

Anforderungsbereich III: **„eigenständige Problemlösungen"**

Bearbeiten von Sachverhalten mit wenig vertrautem Kontext, höherem Komplexitätsgrad (im Vergleich zu AFB II) oder höherem Allgemeinheitsgrad

Die niveaubestimmenden Aufgaben sind repräsentativ für die Forderungen des Lehrplans. Damit die Exemplarität und zugleich die niveaubestimmende Reichweite der Aufgaben leichter erschlossen werden kann, gibt es zu jeder Aufgabe zusätzlich fachdidaktische Hinweise (Einordnung in das Kompetenzmodell, Hinweise zur Lösung, Kommentar, Aufgabenvariationen). Im Kapitel 2 sind die Aufgaben und die fachdidaktischen Hinweise wie folgt redaktionell strukturiert:

Aufgabenbezeichnung Sjg. – A …

Aufgabenbezeichnung Sjg. – H …

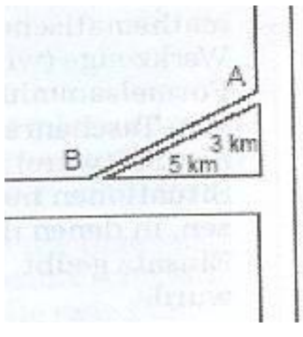
Ein besonderes Anliegen ist es, dass die Entwicklung von allgemeinen mathematischen Kompetenzen im Zusammenhang mit den inhaltsbezogenen Kompetenzen als wesentliches, ja letztlich wichtigstes Ziel im Mathematikunterricht begriffen wird und zu einer entsprechenden Unterrichtsgestaltung führt.

Die niveaubestimmenden Aufgaben stellen somit keine Aufgabensammlung im herkömmlichen Sinne dar, sondern sie ergänzen den Lehrplan. Exemplarisch wird vermittelt, wie die Kompetenzorientierung des Lehrplans im Unterricht und bei Lernkontrollen konsequent bis hin zu den Lernenden zu interpretieren ist.

Das Material soll den Lehrkräften helfen, in ähnlicher Weise „kompetenzorientiert“ an die Auswahl, Modifizierung und das Nutzen von mathematischen Aufgaben in ihrem Unterricht heranzugehen. Damit soll zugleich eine fachdidaktisch fundierte und auf den konkreten Mathematikunterricht bezogene Fachschaftsarbeit unterstützt werden.

1.2 Zur Analyse und Konstruktion von Aufgaben unter dem Aspekt der Kompetenzentwicklung

Für das Erreichen der Lehrplanziele ist es unabdingbar, im Unterricht eine solche Aufgabenkultur zu gestalten, die die konsequente Kompetenzorientierung des Lehrplans hinreichend berücksichtigt.
Dies wird vor allem dadurch erreicht, dass die Lehrkraft das Kompetenzpotenzial von Aufgaben erkennt und im Unterricht bewusst eine entsprechende Kompetenzentwicklung anstrebt.
Im Folgenden soll ein Aufgabenbeispiel unter dem Aspekt „Kompetenzpotenzial“ analysiert werden, um so ein tieferes Verständnis für die Auswahl und Darstellung der niveaubestimmenden Aufgaben im Kapitel 2 zu erreichen.
Beispiel: **Lohnt sich die Abkürzung?**[1]

Viele Autofahrer benutzen für die Fahrt von A nach B nicht die stark befahrene Hauptstraße, sondern einen „Schleichweg“. Äußern Sie sich, ob die Abkürzung eine Zeitersparnis bringt, wenn man auf dem „Schleichweg“ durchschnittlich mit 30 $\frac{km}{h}$ und auf den Hauptstraßen durchschnittlich mit 50 $\frac{km}{h}$ fahren kann.	

[1] Aufgabenbeispiel 1 aus den Bildungsstandards für den Mittleren Schulabschluss

Diese Aufgabe unterscheidet sich offenkundig von „klassischen“ Bestimmungsaufgaben, die zumeist sehr konkret angeben, welche Größen zu berechnen sind. Hier steht nicht das Training eines bestimmten Verfahrens im Mittelpunkt, sondern ein plausibles Alltagsproblem.

Das Aufgabenziel besteht weder explizit und noch allein im Ausrechnen einer evtl. Zeitersparnis, sondern darin, sich zu den beiden Möglichkeiten („Hauptstraße“, „Schleichweg“) unter dem Aspekt der Zeitersparnis zu äußern. Es umfasst also explizit die allgemeine mathematische Kompetenz „mathematisch argumentieren und kommunizieren“. Implizit spielen dabei mathematische Modelle eine wesentliche Rolle.

Analyse unter dem Aspekt „mathematisch modellieren“

Es sind die Zeiten für die zwei Wegvarianten zu ermitteln, wobei jeweils annähernd gleichförmige Bewegung angenommen wird.

a) Hauptstraße; s_H = 3 km + 5 km = 8 km; t_H = 0,16 h $\approx$ 10 min

b) „Schleichweg“: Die Skizze legt annähernd ein rechtwinkliges Dreieck nahe, so dass die Länge des Schleichweges näherungsweise mit dem Satz des Pythagoras berechnet werden kann. $\overline{AB} = \sqrt{25+9}$ km $\approx$ 6 km; t_S = 0,2 h = 12 min

Es gehen hier also zwei sehr „starke“ Annahmen bei der Modellierung (geradlinig gleichförmige Bewegung, rechtwinkliges Dreieck) ein, was es nicht nur vollauf rechtfertigt, sondern sogar erfordert, die Ergebnisse mit keiner größeren Genauigkeit als ganzzahlige Minuten anzugeben. Diese Modellierungsannahmen zu reflektieren, ist für das Erfüllen der Aufgabe, sich zur Zeitersparnis zu äußern, sehr wichtig (vgl. Kompetenz M3).

Analyse unter dem Aspekt „mathematisch argumentieren und kommunizieren“

Fasst man die Wegzeiten zusammen, so kommt man rein rechnerisch zu einer Zeitersparnis von 2 Minuten, wenn man die Hauptstraße, also den längeren Weg, wählt. Wenn man aber bedenkt, dass

- erstens diese Zeiten auf der Grundlage sehr vereinfachter Annahmen ermittelt wurden,
- zweitens zahlreiche andere Aspekte nicht beachtet wurden (z. B. Verkehrsdichte; Anzahl der Ampeln auf beiden Wegstrecken, Beschaffenheit der Straße),

dann sind die Zeiten t_H und t_S folglich grobe Näherungswerte. Damit ist als sachgerechte Antwort angemessen: „Die Abkürzung bringt keine Zeitersparnis.“

Es ist ein wichtiges Ziel beim Anwenden von Mathematik, dass Schülerinnen und Schüler nicht formal Ergebnisse ausrechnen, sondern die Resultate unter Berücksichtigung der Modellierungsannahmen in Beziehung zur realen Situation setzen.

Solche Analysen ermöglichen es, Potenzen von Aufgaben für die Kompetenzentwicklung zu erkennen. Dabei geht es – entsprechend dem Kompetenzmodell – um die inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzen und um die allgemeinen mathematischen Kompetenzen.
Für das gewählte Aufgabenbeispiel erlaubt die Analyse folgende Einordnung:

EINORDNUNG IN DAS KOMPETENZMODELL mit Zuordnung von Anforderungsbereichen

Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen				Allgemeine mathematische Kompetenzen			
$a^2=5m^2$				P	M	A	D
x	x				1, 3	6	

Kompetenz	AFB I	AFB II	AFB III
- Erkennen, dass die Gleichung $v = \frac{s}{t}$ anwendbar ist	x		
- Anwendbarkeit des Satzes des Pythagoras erkennen und ihn anwenden		x	
- Zeitgrößen ineinander umrechnen	x		
- Modellierungsannahmen reflektieren und Ergebnisse interpretieren		x	

Anmerkungen zur Einordnung

Einordnungen in das Kompetenzmodell sind zumeist nicht eindeutig vorzunehmen. In der Regel sind – je nach didaktischer Intention – Schwerpunkte zu setzen.
Die Einordnung in den Inhaltsbereich **Zahlen und Größen** erfolgt hier vor allem wegen der Größen Geschwindigkeit, Weg und Zeit sowie der zu lösenden Gleichungen.[2]
Die Einordnung in den Inhaltsbereich **Raum und Form** erfolgt hier vor allem wegen der Anwendbarkeit des Satzes des Pythagoras.
Diese gewisse Unbestimmtheit (aber nicht Beliebigkeit!) erhöht sich bei den allgemeinen mathematischen Kompetenzen. Obwohl Teilkompetenzen der Kompetenz „Probleme mathematisch lösen“ vorkommen, wurden diese nicht explizit in den Mittelpunkt gerückt, da hier die didaktische Intention des Modellierens und Argumentierens dominant ist.
Derartige Schwerpunktsetzungen sind sinnvoll und notwendig, um die Aufmerksamkeit auf die jeweiligen relevanten didaktischen Ziele zu fokussieren.

[2] Nicht immer, wenn Zahlen vorkommen, ist es angemessen oder sinnvoll, den Inhaltsbereich Zahlen und Größen zu betonen (z. B. beim Lösen einer Aufgabe, wo es hauptsächlich um das Berechnen einer Wahrscheinlichkeit geht).

Ähnliche Unschärfen ergeben sich, wenn man der Frage nachgeht, welchen **Anforderungsbereichen** die geforderten Lösungstätigkeiten zuzuordnen sind. Aus dem Begriff „Anforderungsbereich“ ergibt sich, dass zwei Begriffsmerkmale zu beachten sind:

Merkmal 1: objektive Anforderungsstruktur der Aufgabe (Komplexität der kognitiven Anforderungen),

Merkmal 2: Bekanntheits- und Vertrautheitsgrad der Aufgabe (Unterrichtsbezug, geübte Zusammenhänge).

Den Unterrichtsbezug für eine Lerngruppe (Merkmal 2) kann am treffendsten die Lehrkraft berücksichtigen. Für die Zuordnung der „niveaubestimmenden Aufgaben“ (wie auch von Prüfungsaufgaben) zu Anforderungsbereichen ist eine objektivierte Sichtweise anzuwenden. Es ist zu bestimmen, welche Schülerpopulation die Aufgabe zu lösen hat. Damit kann dann unter Berücksichtigung der Lehrplansituation der Unterrichtsbezug annähernd eingeschätzt werden.

Für das Aufgabenbeispiel wird folgende Situation angenommen: Die Aufgabe wird am Ende des 10. Schuljahrgangs im realschulabschlussbezogenen Unterricht gestellt.

Vor diesem Hintergrund kann, ja muss davon ausgegangen werden, dass die Modelle „geradlinig gleichförmige Bewegung“; „Durchschnittsgeschwindigkeit“ den Schülerinnen und Schülern aus dem Unterricht vertraut sind. Die zugehörige Gleichung unterstellt einen einfach strukturierten funktionalen Zusammenhang (Proportionalität). Ähnlich ist es mit dem Umrechnen von Zeitgrößen. Im Zusammenhang mit Merkmal 1 (objektive Anforderungsstruktur eher gering) sind diese Lösungshandlungen dem Anforderungsbereich I zugeordnet.

Das Erkennen der Anwendbarkeit des Modells „rechtwinkliges Dreieck“, das Reflektieren der Modellannahmen sowie das Interpretieren der Befunde werden dem Anforderungsbereich II zugeordnet, da laut Lehrplan ähnliche Forderungen schon in früheren Schuljahrgängen zu stellen und entsprechende Kompetenzen zu entwickeln sind und der Komplexitätsgrad (Merkmal 1) tendenziell höher als bei den o. g. Modellen ist.

Bei Unterstellung eines anderen Unterrichtsbezuges (z. B. Schuljahrgang 8, hauptschulabschlussbezogener Unterricht) kann man zu einer anderen Einschätzung kommen. Der geänderte Bezug kann dabei auch Anlass zur Variation einer Aufgabe geben.

Hinweise und Anregungen zu möglichen Aufgabenvariationen bezogen auf das Aufgabenbeispiel

a) Eine sehr unkomplizierte Variationsmöglichkeit besteht darin, die Aufgabe mit verändertem Zahlenmaterial zu stellen.

   Hier z. B.: - Auf der Hauptstraße sind durchschnittlich 60 $\frac{km}{h}$ möglich.

   - Die beiden Hauptstraßenabschnitte haben eine Länge von 6 km bzw. 4 km.

Die didaktische Bedeutung einer solchen oder ähnlichen Variation ist nicht gering zu schätzen, stellen sich doch Lerneffekte bei nicht wenigen Schülerinnen und Schülern erst durch wiederholtes Üben ein, und zwar dann, wenn durch das Übungsmaterial tatsächlich eine Stabilisierung der Handlung ermöglicht wird.

b) Modifizierte Aufgabe mit dem Schwerpunkt „Durchschnittsgeschwindigkeit“

Franks Vater fährt täglich 56 km mit einer Durchschnittsgeschwindigkleit von 90 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ zur Arbeit. Er sagt, dass er künftig schneller fahren und damit eine Durchschnittsgeschwindigkleit von 100 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ erreichen will.

Äußere dich zum Zeitgewinn, den Franks Vater dadurch haben kann.

Weitere Aufgaben mit dem Schwerpunkt „Anwendbarkeit des Satzes des Pythagoras“

- Eine 8 m lange Leiter lehnt an einer Hauswand. Die Leiter ist unten 1,80 m von der Hauswand entfernt.

  Beschreibe, wie man die Höhe berechnen kann, bei der die Leiter oben an der Hauswand lehnt.
- Thomas lässt einen Drachen steigen, so hoch es die 80 m lange Schnur zulässt. Petra steht von Thomas 60 Schritte von je 0,8 m Länge entfernt und sieht den Drachen senkrecht über sich.

  Schätze, wie hoch der Drachen ist und beschreibe, wie man die Höhe des Drachens berechnen kann.

Ein weiterer Anspruch an eine kompetenzorientierte Aufgabenkultur ist es, eine <u>systematische</u> Kompetenzentwicklung zu unterstützen. Dafür bedarf es adressatengerechter Übungsfolgen für die jeweilige Lerngruppe. Eine Möglichkeit hierfür stellen Aufgabentripel dar, welche drei Aufgaben zu etwa dem gleichen Inhalt oder Sachverhalt umfassen, wobei die erste Aufgabe zum AFB I, die zweite Aufgabe zum AFB II und die dritte Aufgabe zum AFB III gehört.

Die Aufgaben eines Aufgabentripels stehen bezüglich ihres unterrichtlichen Einsatzes zumeist in einem engen zeitlichen Zusammenhang. Gleichwohl können „Entwicklungssprünge“ vermittels der Aufgaben eines Tripels auch über längere Zeiträume verdeutlicht werden.

Beispiel für ein Aufgabentripel zum Abstandsbegriff (Inhaltsbereich Raum und Form)

Aufgabe A_I

Gegeben ist ein gleichseitiges Dreieck ABC mit einer Seitenlänge von 3 cm.

a) Welche Aussage über den Abstand des Punktes C von Seite c ist richtig? Begründe.

(1) Der Abstand ist größer als 3 cm

(2) Der Abstand beträgt genau 3 cm.

(3) Der Abstand ist kleiner als 3 cm

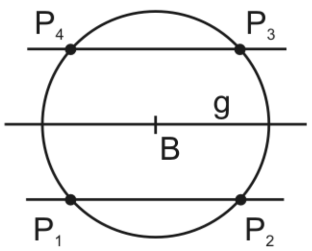
b) Konstruiere das Dreieck ABC und ermittle den Abstand des Punktes C von der Seite c mithilfe einer Konstruktion.

Aufgabe A_{II}

Auf einer Geraden g liege ein Punkt B. Es sind alle die Punkte in der Ebene gesucht, die vom Punkt B den Abstand 3 cm haben und 2 cm von der Geraden g entfernt liegen.

a) Die Abbildung zeigt eine Lösungsidee zur Konstruktion dieser Punkte.
Konstruiere die gesuchten Punkte unter Beachtung der gegebenen Abstände.

b) Begründe, warum es genau vier solche Punkte gibt, die die Bedingungen der Aufgabe erfüllen.



(Abbildung nicht maßstabsgerecht)

Aufgabe A_{III}

Auf einer Geraden g liege ein Punkt B. Durch Konstruktion sollen alle die Punkte in der Ebene ermittelt werden, die von B den Abstand 3 cm haben und 2 cm von der Geraden g entfernt liegen.

a) Welche der folgenden Zeichnungen kann nicht die Lösung der Aufgabe sein? Begründe.

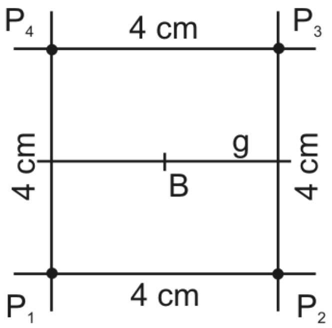


Abb. 1

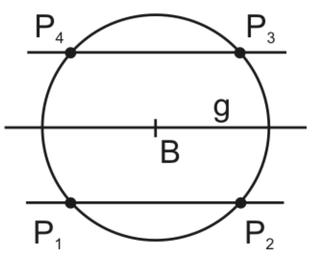


Abb. 2

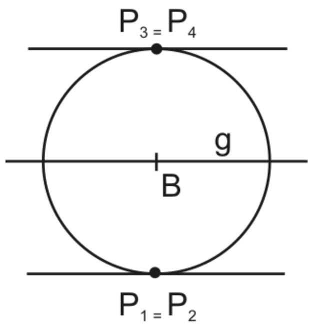


Abb. 3

(Abbildungen nicht maßstabsgerecht)

b) Konstruiere die gesuchten Punkte P_1 bis P_4 und beschreibe die Konstruktion.

Erläuterung zur Differenzierung der Anforderungen und zur Einordnung in die drei Anforderungsbereiche

Zu Aufgabe A_I:

Es handelt sich hierbei um eine Wiedergabe bzw. direkte Anwendung von grundlegenden Begriffen, Sätzen und Verfahren („gleichseitiges Dreieck“; „Höhe im Dreieck“, Konstruktion eines gleichseitigen Dreiecks) in geübten Zusammenhängen. Die Abstandsproblematik ist so aufbereitet, dass sie anschaulich intuitiv zugänglich ist.

Zu Aufgabe A_{II}:

Es geht um das Bearbeiten eines bekannten Sachverhaltes (Kreis, parallele Geraden), wobei ein Verknüpfen verschiedener Kenntnisse und Fähigkeiten erforderlich ist (Kreis als geometrischer Ort; zueinander parallele Geraden als geometrischer Ort, Ausführen einer Konstruktion).

Zu Aufgabe A_{III}:

Diese Aufgabe hat einen höheren Komplexitätsgrad als Aufgabe A_{II}. Das explizite Ausschließen der Abbildungen 1 und 3 erfordert eine tiefergehende Analyse. So muss z. B. bei Abb. 1 erkannt werden, dass die Punkte P_1 bis P_4 zwar den geforderten Abstand von 2 cm zur Geraden g haben, aber der Abstand vom Punkt B z. B. zum Punkt P_4, also die Länge der Strecke $\overline{BP_4}$, $\sqrt{8}$ cm $\neq$ 3 cm ist. Darüber hinaus stellt das Formulieren einer Konstruktionsbeschreibung für diesen Fall eine wenig vertraute Anforderung dar.

Beispiel für ein Aufgabentripel zum Begriff Teilbarkeit (Inhaltsbereich Zahlen und Größen)

Aufgabe A_I

Ermittle jeweils alle Teiler der Zahlen 8; 10 und 15.

Aufgabe A_{II}

Gegeben sind die Zahlen 24 und 42.

a) Prüfe die Zahlen auf Teilbarkeit durch 2; 3 und 5.
b) Untersuche die Zahlen auf Teilbarkeit durch 6. Erkläre dein Vorgehen.

Aufgabe A_{III}

a) Untersuche die beiden Zahlen 1809 und 9801 auf Teilbarkeit durch 9 und erkläre dein Vorgehen.
b) Formuliere eine Regel für die Teilbarkeit einer Zahl durch 9.
c) Gib weitere vierstellige natürliche Zahlen mit den Ziffern 1; 8; 9 und 0 an, die durch 9 teilbar sind. Begründe jeweils.

Erläuterung zur Differenzierung der Anforderungen und zur Einordnung in die drei Anforderungsbereiche

Im Lehrplan sind die Teilbarkeitsregeln für die Teilbarkeit durch 2; 3; 5 und 10 als grundlegender Wissensbestand ausgewiesen. Dementsprechend stellen solche Aufforderungen wie in A_I eine direkte Anwendung in geübten Zusammenhängen dar (Anforderungsbereich I).
Die Kompetenz „natürliche Zahlen auf Teilbarkeit untersuchen und Teiler ermitteln" (siehe Lehrplan) bedeutet nicht, dass sich dies nur auf Teiler beziehen darf, für die Teilbarkeitsregeln im Lehrplan explizit in den grundlegenden Wissensbeständen ausgewiesen sind. Weitere Teiler können sehr wohl durch inhaltliche Überlegungen ermittelt werden. Darauf zielen die Aufgaben A_{II} und A_{III}, die aber ein Verknüpfen verschiedener Kenntnisse mit zunehmendem Komplexitätsgrad erfordern (Anforderungsbereich II und III).

Die beiden Beispiele für Aufgabentripel vermitteln sicher nur eine Auswahl aus den vielen Möglichkeiten zu den aufgegriffenen Lehrplaninhalten. Jede Lehrkraft kann durch Variation von Aufgabeninhalten und -bedingungen einschließlich der Darstellung der Aufgabe (gegliedert, unterstützende grafische Elemente, Zusatzinformationen, …) weitere Aufgabentripel konstruieren.
Die Beispiele zeigen ferner, dass eine kompetenzorientierte Aufgabenkultur sehr wohl auch Aufgaben einschließt, die rein innermathematischer Natur sein können.

Aufgabentripel sind für die Unterrichtspraxis in mindestens zweierlei Hinsicht von Bedeutung.
Zum einen stellen sie in Übungsphasen eine Möglichkeit für das didaktische Differenzieren dar (im Sinne einer Aufgabendifferenzierung - nicht alle Schülerinnen und Schüler bearbeiten alle drei Aufgaben), wobei jedoch alle Schülerinnen und Schüler an einem gemeinsamen Aufgabenkern arbeiten, was wiederum gemeinsame Auswertungsphasen ermöglicht. Dieses Aufgabentripel ist dann im Sinne einer Aufgabe zum Lernen eingesetzt.
Zum anderen bieten Aufgabentripel eine Auswahlmöglichkeit für Lernkontrollen. Diese müssen Anforderungen aus allen drei Anforderungsbereichen enthalten. Eine Kontrollarbeit kann mit Elementen eines Aufgabentripels so komplettiert werden, dass die geforderte Relation bei den Anforderungsbereichen eingehalten wird (Aufgabe zum Leisten).

1.3 Signalworte für Arbeitsaufträge im Fach Mathematik

Signalworte werden häufig bei der Formulierung von Schüleraufgaben im Fach Mathematik, die in der Regel als Arbeitsaufträge formuliert sind, verwendet.

Das bewusste Arbeiten mit Signalworten[3] beim Entwickeln von Arbeitsaufträgen ist in zweifacher Hinsicht von Bedeutung.

Einerseits bietet es die Chance, gezielt Anforderungen an die auszuführenden Tätigkeiten zu variieren. Erfahrungen zeigen, dass Arbeitsaufträge mit den Signalworten z. B. „Berechnen …“, „Ermitteln …“, „Nachweisen …“ oder „Zeichnen …“ gehäuft auftreten, während Arbeitsaufträge mit den Signalworten z. B. „Erklären …“ oder „Beschreiben …“ eher selten vorkommen. Da die Signalworte ganz unterschiedliche Kompetenzen aktivieren, ist deren Vielfalt ein <u>Qualitätsmerkmal für eine „gute“ Aufgabenkultur</u> (sowohl im Unterricht selbst, als auch im Rahmen von Lernkontrollen).

Andererseits ermöglicht das konsequente Verwenden von Signalworten, dass die Schülerinnen und Schüler nicht nur Klarheit über die erwartete Leistung haben, sondern dass sie auch „methodisches“ Wissen erwerben. So können sie Erfahrungen zu <u>signalwortbezogenen Vorgehensweisen und Darstellungsformen</u> sammeln.

Beim Formulieren von Aufträgen zeigt sich, dass ein formales Umgehen mit Signalworten Gefahr läuft, inhaltliche Bezüge zu vernachlässigen.

So ist das formale Zuordnen von Signalworten zu Anforderungsbereichen nicht sachgerecht. Eine Aufgabe z. B. mit dem Signalwort NACHWEISEN (oder BEGRÜNDEN) repräsentiert nicht automatisch den Anforderungsbereich III. Dies hängt entscheidend von der Aussage ab, deren Wahrheit nachzuweisen ist.

Beispiele:

- Weise nach, dass es kein Dreieck mit zwei stumpfen Winkeln geben kann.
- Weise nach, dass in jedem Fünfeck die Innenwinkelsumme 540° beträgt.

[3] Mit Signalworten sind hier die Aufforderungsverben gemeint, die zum Formulieren von Arbeitsaufträgen verwendet werden. Der Begriff „Operator“ wird bewusst nicht verwendet, da dieser ein schematisches Handeln assoziieren lässt, so, als gäbe es jeweils einen „Algorithmus“ für die Lösungshandlung.

Eine weitere Grenze besteht darin, dass das „System“ der Signalworte „engmaschig“ gerät und die „Definition“ der erwarteten Leistungen zu detailliert ausfällt. Geringfügige Unterschiede können dadurch möglicherweise ein sachlich nicht gerechtfertigtes Gewicht erhalten. So erscheint z. B. der Unterschied zwischen den Signalworten „ERLÄUTERN“ und „ERKLÄREN“ aus Sicht des Mathematikunterrichts vielfach gering.

Ein Versuch, Vollständigkeit zu erreichen ist weder ziel- noch inhaltsadäquat.
Bewusst wird auf Aufforderungsverben verzichtet, die z. B. sehr detaillierte Tätigkeiten erfordern (u. a. „Beschriften …“, „Vervollständigen …“, „Veranschaulichen …“, „Zuordnen …“).
In der folgenden Übersicht sind ebenso keine Aufforderungsverben aufgenommen worden, die einen sehr speziellen mathematischen Inhaltsbezug haben wie z. B. „Umformen …“, „Ausmultiplizieren …“, „Ausklammern ...“.
Auch Synonyme sollen und können verwendet werden, denn die Übersicht über die Signalworte soll sprachliche Vielfalt nicht behindern.

Signalworte	Beschreibung der hauptsächlich zu erwartenden Leistungen [4]	Bemerkungen
nennen angeben benennen formulieren	Ergebnis symbolisch, numerisch oder verbal mitteilen	Die Ausführlichkeit ist abhängig vom Kontext.
skizzieren grafisch darstellen zeichnen konstruieren	grafisches Darstellen eines Objektes bzw. eines Sachverhaltes, so dass wesentliche Eigenschaften widergespiegelt werden maßgetreues oder maßstäbliches zeichnerisches Darstellen eines Objektes [5]	Das Zeichnen stellt höhere Forderungen hinsichtlich des Beachtens quantitativer Aspekte als das Skizzieren.
berechnen	rechnerisches Lösen von Bestimmungsaufgaben	Es dürfen nur gegebene und berechnete Werte einfließen.
lösen bestimmen ermitteln	Ergebnisse von Aufgaben bei freier Wahl eines Lösungsverfahrens (z. B. auf grafischem Wege, auch näherungsweise, systematisches Probieren) finden	Diese Signalworte sind gleichwertig. Auch ein Berechnen ist möglich.
entwickeln konstruieren	ein mathematisches Modell erarbeiten (z. B. für einen Hypothesentest, Gleichungen zu einem Sachverhalt)	
zeigen nachweisen beweisen begründen	Bestätigen der Wahrheit einer gegebenen Aussage (z. B. durch Berechnungen, Argumentationsketten) bzw. einen Sachverhalt gestützt auf Fachwissen rechtfertigen	Die Signalworte zielen auf Erkenntnissicherung einer gegebenen Aussage.
schlussfolgern herleiten untersuchen entscheiden beurteilen	Ableiten von Aussagen aus gegebenen Sachverhalten und bestätigen der Wahrheit dieser Aussagen (z. B. durch Berechnungen, Argumentationsketten) bzw. einen Sachverhalt gestützt auf Fachwissen bewerten	Die Signalworte zielen auf Erkenntnisgewinnung und Erkenntnissicherung.
erläutern erklären beschreiben charakterisieren	einen Sachverhalt (z. B. Begriffe, Sätze, Verfahren) verständlich machen durch textgebundene Darstellungen	
vergleichen klassifizieren interpretieren diskutieren	Ermitteln und Darstellen von Gemeinsamkeiten und Unterschieden nach vorgegebenen oder frei gewählten Gesichtspunkten Auslegen oder Deuten von Begriffen, Ergebnissen, Sachverhalten, Darstellungen, …	Dem Vergleichen, Interpretieren, … ist das Reflektieren über einen Gegenstand gemeinsam. Es werden Bezüge und Zusammenhänge hergestellt.

[4] Grundsätzlich schließt die erwartete Leistung ein, dass bei jeder Aufgabenbearbeitung der gewählte Lösungsweg durch eine angemessene Zahl von Lösungsschritten oder die Antwort nachvollziehbar sein müssen, sofern es sich nicht um sehr spezielle Signalworte (wie z. B. „Nennen“) oder um Anforderungen handelt, die ohne schriftliche Fixierung von Zwischenschritten erfüllbar sind.

[5] Genauere Ausführungen zum Abgrenzen von „Skizzieren - Zeichnen - Konstruieren“ befinden sich auf dem Landesbildungsserver Sachsen-Anhalt (Unterricht - Fächer – Mathematik).

2 Aufgaben

2.1 Schuljahrgänge 5/6

Sechsstellige Zahlen 5/6 – A 1

Es werden alle sechsstelligen Zahlen betrachtet, die sich aus den Ziffern 0; 1; 2; 5; 7 und 8 bilden lassen. Dabei soll jede Ziffer in jeder Zahl genau einmal vorkommen.

a) Schreibe die kleinste und die größte Zahl auf.

b) Gib drei verschiedene durch fünf teilbare Zahlen an und begründe.

c) Untersuche, ob es eine durch drei teilbare Zahl geben kann.

d) Ermittle eine durch vier teilbare Zahl und begründe.

Sechsstellige Zahlen 5/6 – H 1

EINORDNUNG IN DAS KOMPETENZMODELL

Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen				**Allgemeine mathematische Kompetenzen**			
$a^2=5m^2$				**P**	**M**	**A**	**D**
x				1			4

Kompetenz	**AFB I**	**AFB II**	**AFB III**
a) natürliche Zahlen nach Vorschrift erzeugen		x	
b) in einer Teilmenge der natürlichen Zahlen durch 5 teilbare Zahlen identifizieren und begründen		x	
c) Allgemeinaussage zur Teibarkeit durch 3 bezogen auf eine spezielle Teilmenge der natürlichen Zahlen finden		x	
d) ein Vielfaches von 4 erkennen und begründen			x

HINWEISE ZUR LÖSUNG

a) kleinste Zahl: 102578

Der höchste Stellenwert (Hunderttausend) muss mit der kleinsten Ziffer „besetzt“ werden. Damit eine sechsstellige Zahl entsteht, kommt dafür nicht die 0, sondern die 1 in Frage. Der nächstkleinere Stellenwert (Zehntausend) muss dann mit der verbleibenden kleinsten Ziffer, also 0, besetzt werden, usw.

größte Zahl: 875210

Der höchste Stellenwert (Hunderttausend) muss mit der größten Ziffer „besetzt“ werden, also 8. Der nächstkleinere Stellenwert (Zehntausend) muss dann mit der verbleibenden größten Ziffer, also 7, besetzt werden, usw.

b) drei verschiedene durch fünf teilbare Zahlen: z. B. 875210; 872105; 875120

Eine Zahl ist durch fünf teilbar, wenn sie ein Vielfaches von fünf ist. Bei diesen Zahlen muss die letzte Ziffer eine 0 oder 5 sein.

c) Eine Zahl ist nur dann durch drei teilbar, wenn ihre Quersumme durch drei teilbar ist.

Die Quersumme jeder dieser sechsstelligen Zahlen ist 23, d. h. sie ist nicht durch drei teilbar. Folglich gibt es unter diesen sechsstelligen Zahlen keine durch drei teilbare Zahl.

d) durch vier teilbare Zahl: z. B. 875012; 127508; 175820

Eine Zahl ist durch vier teilbar, wenn sie ein Vielfaches von vier ist.

KOMMENTAR

Im Sinne der Befähigung zum Problemlösen ist es, wenn die Schülerinnen und Schüler genügend Gelegenheit haben, diese Zahlen z. B. durch Probieren zu finden. Insbesondere müssen sie zunächst klare Vorstellungen gewinnen, wie die Menge der betrachteten sechsstelligen Zahlen aussieht. Es geht also primär um das Aufgabenverständnis, das durch gründliches Analysieren des Aufgabentextes (sechsstellig … Ziffern … genau einmal …) und durch das Aufschreiben von Beispielen und Gegenbeispielen erreicht werden kann.

AUFGABENVARIATIONEN

Im Interesse der Verinnerlichung von Methodenwissen ist es, wenn inhaltlich wie strukturell ähnliche Aufgaben in gewissen Abständen immer wieder bearbeitet werden.

Beispiel:

Es werden alle fünfstelligen Zahlen betrachtet, die sich aus den Ziffern 0; 2; 3; 6 und 7 bilden lassen, wobei jede Ziffer in jeder Zahl genau einmal vorkommt.

a) Gib daraus die Zahlen mit folgenden Eigenschaften an und begründe.

   (1) die kleinste und die größte Zahl

   (2) drei verschiedene durch fünf teilbare Zahlen

   (3) vier verschiedene durch vier teilbare Zahlen

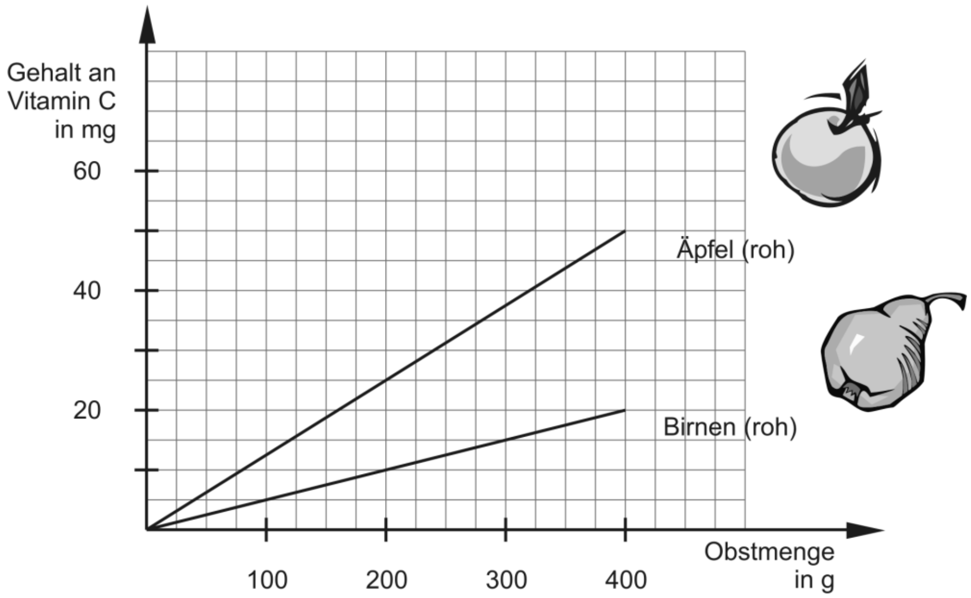
   (4) eine weder durch zwei noch durch drei teilbare Zahl

b) Untersuche, ob es unter diesen fünfstelligen Zahlen solche gibt, die auch durch sechs teilbar sind.

c) Stelle Dir vor, es wären alle fünfstelligen Zahlen, die sich aus den Ziffern 0; 2; 3; 6 und 7 bilden lassen, mit der kleinsten beginnend der Größe nach aufgeschrieben.
   Gib die letzten sechs Zahlen dieser Zahlenreihe an.

Zur gesunden Ernährung gehört eine vitaminreiche Kost.

In der folgenden grafischen Darstellung ist der Gehalt an Vitamin C von rohen Äpfeln und von rohen Birnen dargestellt.



a) Wie viel Milligramm Vitamin C sind in 300 g Birnen enthalten?

b) Wie viel Gramm Äpfel haben 25 mg Vitamin C?

c) Begründe mithilfe des Diagramms, dass der Gehalt an Vitamin C direkt proportional zur Obstmenge ist.

d) Ermittle jeweils einen Proportionalitätsfaktor.

Vitamin C 5/6 – H 2

EINORDNUNG IN DAS KOMPETENZMODELL

Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen				Allgemeine mathematische Kompetenzen			
$a^2=5m^2$				P	M	A	D
		x				4	2

Kompetenz	AFB I	AFB II	AFB III
a/b) Daten aus dem Koordinatensystem („vorwärts“ und „rückwärts“) ablesen	x		
c) direkte Proportionalität begründen		x	
d) Proportionaltätsfaktor bei einer in einem Diagramm dargestellten Abhängigkeit von Größen ermitteln			x

HINWEISE ZUR LÖSUNG

a) und b): Die Schülerinnen und Schüler haben auf der Ordinate Zwischenwerte zu beachten, die nicht explizit angetragen sind, z. B. 15 mg Vitamin C bei a).

c) Der Aufgabensituation angemessen ist z. B. folgende Begründung: Die zu den Wertepaaren gehörenden Punkte liegen alle jeweils auf einer Geraden, die durch den Koordinatenursprung geht.

d) Es genügt, jeweils ein Wertepaar abzulesen und einen Quotienten zu bilden, z. B. bei Birne:

$$\frac{\text{Gehalt an Vitamin C}}{\text{Obstmenge}} = \frac{20\ \text{mg}}{400\ \text{g}} = \frac{1}{20}\,\frac{\text{mg}}{\text{g}} .$$

KOMMENTAR

Die Schülerinnen und Schüler sollten frühzeitig an unterschiedliche Skaleneinteilungen gewöhnt werden und lernen, auch Zwischenwerte zu ermitteln. Außerdem ist der Wechsel der „Blickrichtung“ („vorwärts“, d. h. von Abszisse zur Ordinate, bzw. „rückwärts“, d. h. von der Ordinate zur Abszisse) zu üben.

Beim Auswerten von Schülerlösungen ist auf das Verwenden der Fachsprache sowie auf Vollständigkeit Wert zu legen. Begründungen sollten auch schriftlich fixiert werden.

Bei der Ermittlung eines Proportionalitätsfaktors müssen bei Größen die Einheiten mitgeführt werden. In diesem Beispiel erscheint ein Umrechnen von g in mg und Kürzen nicht sinnvoll.

Die inhaltliche Bedeutung des Proportionalitätsfaktors sollte auch alltagssprachlich formuliert werden, z. B.: „In 20 g roher Birne ist 1 mg Vitamin C enthalten." oder „Wenn die Birnenmenge um 20 g zunimmt, dann nimmt der Gehalt an Vitamin C um 1 mg zu."

AUFGABENVARIATIONEN

Eine Variationsmöglichkeit besteht in der Verwendung anderer Diagramme. Z. B. findet man im Internet weitere Zusammenhänge, die für Schülerinnen und Schüler auch eine gewisse inhaltliche Bedeutung haben.

Bezogen auf das gegebene Diagramm könnten weitere Teilaufgaben gestellt werden, z. B.:

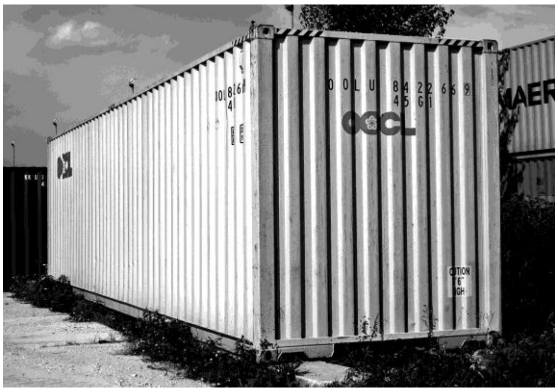
- Stelle für die Diagramme fünf Wertepaare jeweils in einer Tabelle dar.
- Stelle das Diagramm für die Birne in einem Koordinatensystem dar, wobei 100 g Obstmenge 1 cm auf der „x-Achse" entsprechen. Vergleiche mit dem gegebenen Diagramm. Was stellst du fest?
- Stelle die Diagramme in einem Koordinatensystem dar, wobei die Achsen vertauscht sind.

Container 5/6 – A 3

Für den Warentransport werden oft Container verwendet. Container sind große quaderförmige Behälter, die sehr effektiv auf Lkw, Güterzüge oder Schiffe verladen werden können.

Ein Container hat folgende Innenmaße:

Länge:	6,00 m
Breite:	2,50 m
Höhe:	2,50 m



a) Skizziere die Ladefläche und schreibe die Maße an die Seiten.

b) Berechne den Flächeninhalt der Ladefläche.

c) Mit dem Container sollen Waren befördert werden, die in Kartons verpackt sind.
Die Kartons haben die Form eines Würfels mit der Kantenlänge 70 cm.
Ermittle die Anzahl der Kartons, die maximal in dem Container gestapelt werden können.

Container 5/6 – H 3

EINORDNUNG IN DAS KOMPETENZMODELL

Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen				**Allgemeine mathematische Kompetenzen**			
$a^2=5m^2$				P	M	A	D
	x			1	4		1

Kompetenz	**AFB I**	**AFB II**	**AFB III**
a) Skizze zu Sachverhalt anfertigen und Seitenlängen beschriften		x	
b) Flächeninhalt in Sachsituation berechnen		x	
c) mit Raumvorstellung Sachproblem lösen			x

HINWEISE ZUR LÖSUNG

a) Die Ladefläche muss als Rechteck skizziert und mit den Maßen 6,00 m und 2,50 m bezeichnet werden.

b) Die Ladefläche hat einen Flächeninhalt von 15 m².

c) Die Vorstellung über das Auslegen bringt die realistische Lösung. Auf 6,00 m Länge passen 8 Kartons, auf 2,50 m Breite bzw. Höhe sind es je 3 Kartons. Also passen maximal $8 \cdot 3 \cdot 3 = 72$ Kartons in den Container.

KOMMENTAR

Diese Aufgabe stellt hohe Ansprüche hinsichtlich des inhaltlichen Durchdringens eines Sachverhaltes. Sie verlangt den Schülerinnen und Schülern schon einige Modellierungshandlungen ab. Der Container muss aus dem Bild und der Textanalyse als Quader erkannt werden. Mit der Forderung a) „Ladefläche skizzieren" soll ein Rechteck „erkannt" und laut Sachverhalt bemaßt werden. Wenn die Ladefläche als Rechteck erkannt wird, stellt die Berechnung b) eine formale Teilaufgabe dar. Im Aufgabenteil c) geht es nicht nur um die Modellierung von Quader und Würfel, sondern auch um den sachgerechten Umgang mit Größen. Hier könnte die Vorstellung des Auslegens eines Quaders mit Würfeln zur Lösung führen.

AUFGABENVARIATIONEN

Diese komplexe Aufgabenstellung sollte in vielfältigen Teilaufgaben (evtl. auch in täglichen Übungen) geübt und trainiert werden:

- Erkennen geometrischer Figuren in Realobjekten (Eisenbahnwaggon, Kleintransporter, Anhänger von Lkw),
- Berechnen von geometrischen Grundfiguren, wobei Größen umgerechnet werden müssen,
- Aufgaben zur Verpackung von Waren.

Das folgende Beispiel ist eine Aufgabe, bei der hauptsächlich die gegebenen Zahlen verändert wurden.

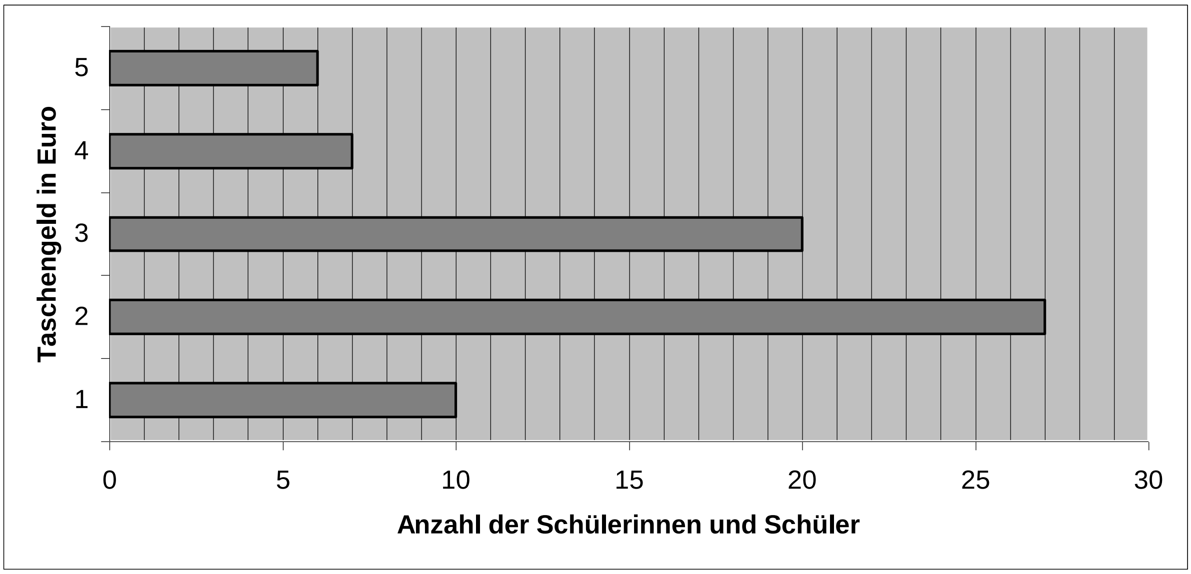
Familie Müller möchte in eine größere Wohnung umziehen. Sie hat sich dafür einen Kleintransporter gemietet. Die Maße des Laderaumes sind: Länge 3,00 m, Breite 1,50 m, Höhe 1,50 m.

a) Skizziere die Ladefläche und schreibe die Maße an die Seiten.
b) Berechne den Flächeninhalt der Ladefläche.
c) Familie Müller hat die vielen kleinen Sachen in 26 Umzugskartons verpackt. Diese Kartons sind 90 cm lang, 40 cm breit und 40 cm hoch.

Untersuche, ob diese Kartons mit einer Fahrt transportiert werden können.

Taschengeld 5/6 – A 4

Das Ergebnis einer Umfrage nach der Höhe des Taschengeldes pro Woche wurde in dem folgenden Diagramm dargestellt.



a) Ergänze folgende Tabelle.

Höhe des Taschengeldes	1 €	2 €	3 €	4 €	5 €
Anzahl der Schülerinnen und Schüler					

b) Berechne, wie viel Euro Taschengeld jede Schülerin bzw. jeder Schüler durchschnittlich pro Woche erhält.

c) Plane eine anonyme Befragung in deiner Klasse zur Höhe des Taschengeldes.

Taschengeld 5/6 – H 4

EINORDNUNG IN DAS KOMPETENZMODELL

Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen				Allgemeine mathematische Kompetenzen			
$a^2=5m^2$				P	M	A	D
			x	3			2

Kompetenz	AFB I	AFB II	AFB III
a) einem Diagramm Informationen entnehmen	x		
b) Durchschnitt in komplexer Sachsituation berechnen			x
c) Datenerhebungen planen		x	

HINWEISE ZUR LÖSUNG

a) 1 €: 10; 2 €: 27; 3 €: 20; 4 €: 7; 5 €: 6

b) $(1 \cdot 10 + 2 \cdot 27 + 3 \cdot 20 + 4 \cdot 7 + 5 \cdot 6) : 70 = 2{,}6$; Durchschnittlich erhält jede Schülerin bzw. jeder Schüler 2,60 € Taschengeld pro Woche.

c) Eine sehr einfache, aber zulässige Möglichkeit besteht darin, dass jede Schülerin bzw. jeder Schüler auf je einen Zettel schreibt, wieviel Taschengeld sie bzw. er pro Woche erhält.

Eine weitere Variante besteht darin, einen „Fragebogen" vorzubereiten, z. B.:

Kreuze an, wie viel Taschengeld (TG) du wöchentlich erhältst.					
kein TG	weniger als 1,50 €	1,50 € ≤ TG < 2,50 €	2,50 € ≤ TG < 3,50 €	3,50 € ≤ TG < 5 €	mehr als 5 €

KOMMENTAR

Das Entnehmen von Daten aus einem solch einfach skalierten Diagramm und das Übertragen der Daten in die Darstellungsform „Tabelle" stellt eine basale Kompetenz dar.

Die Durchschnittsberechnung im Aufgabenteil b) stellt komplexe Anforderungen, da nicht einfach die gegebenen Werte zu addieren und durch ihre Anzahl zu dividieren sind. Hier sind für die „Summe aller Werte" dem Sachverhalt entsprechend zunächst die Summanden als Produkt „Taschengeld mal Anzahl" zu berechnen. Da dieser Aufgabentyp im Alltag gar nicht selten vorkommt (z. B. auch bei Zensurendurchschnitten) sollte ihm gebührende Aufmerksamkeit gewidmet werden.

Die Aufgabe c) wird zu verschiedenen Planungen führen, die hinsichtlich ihrer Zweckmäßigkeit diskutiert werden sollten.

AUFGABENVARIATIONEN

Für das Üben dieser speziellen Art der Durchschnittsberechnung (Aufgabenteil b) bieten sich zunächst Aufgaben mit verändertem Zahlenmaterial an, z. B. beim Taschengeld eine folgende Vorgabe:

Höhe des Taschengeldes	2 €	3 €	4 €	5 €
Anzahl der Schülerinnen und Schüler	8	10	7	5

Für die Entwicklung der Kompetenz „Berechnen von Durchschnitten“ sind zwingend verschiedenartige Sachverhalte einzubeziehen, z. B.:

Berechne die Durchschnittstemperatur um 12 Uhr im Monat April in Halle.

Temperatur um 12 Uhr	12 °C	14 °C	16 °C	18 °C	20 °C
Anzahl der Tage	5	6	10	5	4

Der Kompetenzentwicklung dienlich ist es, wenn dazu verschiedene Aufgabentypen vorkommen, also nicht nur Bestimmungsaufgaben, sondern z. B. auch Beurteilungsaufgaben, die ein Reflektieren des Lösungsverfahrens erfordern, z. B.:

Überprüfe, ob der Zensurendurchschnitt richtig berechnet wurde.
Wie würdest du rechnen?

Zensur	1	2	3	4	5	6
Anzahl	4	6	8	3	2	1

$\boxed{(4+6+8+3+2+1) : 6 = 24 : 6 = 4{,}0}$

Dreiecke 5/6 – A 5

Von einem Dreieck ABC sind gegeben:

$$a = \overline{BC} = 8{,}0\text{ cm}\ ;\ c = \overline{AB} = 7{,}1\text{ cm}\ ;\ \beta = 45°$$

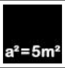
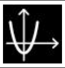
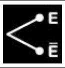
a) Fertige eine Planfigur an und konstruiere das Dreieck ABC.
Formuliere den verwendeten Kongruenzsatz.
Beschreibe die Konstruktion.

b) Zeichne in das Dreieck ABC die Höhe h_a ein.

c) Ermittle den Umfang und den Flächeninhalt des Dreiecks ABC.
Begründe das Vorgehen beim Berechnen des Flächeninhalts.

Dreiecke 5/6 – H 5

EINORDNUNG IN DAS KOMPETENZMODELL

Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen				**Allgemeine mathematische Kompetenzen**			
				**P**	**M**	**A**	**D**
	x			5, 6		3	3

Kompetenz	**AFB I**	**AFB II**	**AFB III**
a) Planfigur anfertigen und Dreieck konstruieren Kongruenzsatz formulieren Konstruktion beschreiben	x 	 x 	 x
b) eine Höhe in ein Dreieck einzeichnen	x		
c) Flächeninhalt und Umfang eines Dreiecks berechnen, wobei benötigte Stücke z. T. selbst aus einer Konstruktion zu ermitteln sind Vorgehen begründen		x	 x

HINWEISE ZUR LÖSUNG

a) In der Planfigur sollen die gegebenen Stücke gekennzeichnet sein. Der anzuwendende Kongruenzsatz SWS soll vollständig (!) als Satz formuliert werden.

Die Konstruktionsbeschreibung empfiehlt sich als Schrittfolge zu notieren.

Beispiel:

(1) Strecke $\overline{AB}$ zeichnen und Endpunkte mit A und B bezeichnen

(2) an $\overline{AB}$ im Punkt B den Winkel β antragen

(3) Strecke $\overline{BC}$ auf dem freien Schenkel von β abtragen, den Endpunkt mit C bezeichnen und die Strecke $\overline{AC}$ zeichnen

b) Da kein Konstruieren gefordert wurde, ist das Verwenden eines Zeichendreiecks zulässig.

c) Aus der Konstruktion ist die Länge der Seite b ($b \approx 5{,}8$ cm) und eine Höhe ($h_a \approx 5{,}0$ cm) zu entnehmen. $u = 20{,}9$ cm ; $A = \frac{1}{2} a \cdot h_a \approx 20{,}0$ cm2

Beim Begründen muss der Bezug Grundseite und zugehörige Höhe deutlich werden.

KOMMENTAR

In dieser Aufgabe sind Grundanforderungen wie „ein Dreieck nach Kongruenzsatz konstruieren“ oder „Flächeninhalt und Umfang eines Dreiecks berechnen“ jeweils zusätzlich gekoppelt mit Anforderungen, die ein Reflektieren der Lösungshandlung verlangen (Konstruktionsbeschreibung, verschiedene Lösungswege beim Flächeninhalt). Dieses Reflektieren ist für das Verständnis und die Nachhaltigkeit des Gelernten unverzichtbar. Daher sollte diesen Teilaufgaben besondere Aufmerksamkeit geschenkt werden.

AUFGABENVARIATIONEN

Diese Aufgabe kann bei gleichem Kongruenzsatz dadurch variiert werden, dass unterschiedliche Seitenlängen und Winkel gewählt werden. Dabei sollten auch solche Maße vorkommen, mit denen nicht immer nur spitzwinklige Dreiecke entstehen, sondern auch rechtwinklige Dreiecke (z. B. $a = \overline{BC}$ = 5,0 m ; c = $\overline{AB}$ = 7,1 cm ; β = 45°) sowie stumpfwinklige Dreiecke (z. B. $a = \overline{BC}$ = 5,0 m ; b = $\overline{AC}$ = 2,5 cm ; γ = 45°).

Weitere Aufgaben sollten sich auf <u>andere</u> Kongruenzsätze beziehen.

Vielfältige Variationen ergeben sich auch durch Einbeziehung weiterer Begriffe und Sätze, wie Kongruenz und Konstruierbarkeit.

Beispiel:

Von einem Dreieck ABC sind zwei Seiten gegeben: a = 4,7 cm; b = 3,5 cm.

a) Konstruiere zwei Dreiecke ABC aus diesen Bestimmungsstücken.

b) Gib ein weiteres Bestimmungsstück an, so dass das Dreieck eindeutig konstruierbar wird.

c) Gib ein weiteres Bestimmungsstück an, so dass das Dreieck nicht konstruierbar ist. Begründe.

Mannschaftsrechnen 5/6 – A 6

„Mannschaften“, bestehend aus vier bis sechs Schülern, sollen die Aufgaben in der Tabelle innerhalb von 20 Minuten lösen. Natürlich soll auch alles richtig sein. Und das Wichtigste: Jeder Schüler aus einer „Mannschaft“ sollte bei Aufforderung jede Aufgabe an der Tafel vorrechnen können!

Bevor ihr losrechnet:

→ Organisiert eine Arbeitsteilung sowie gegenseitige Hilfe.

→ Verabredet, wie ihr die Richtigkeit der Ergebnisse überprüfen wollt.

a	b	c	$a - b$	$c : a$	$a + b \cdot c$	a^2
$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$				
0,3	0,15	6				
1,2	$\frac{2}{5}$	$\frac{5}{4}$				
$\frac{5}{2}$			0,5	1		
	$\frac{1}{10}$			2		0,04

Mannschaftsrechnen 5/6 – H 6

EINORDNUNG IN DAS KOMPETENZMODELL

Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen				Allgemeine mathematische Kompetenzen			
$a^2=5m^2$				P	M	A	D
x				4		1	

Kompetenz	AFB I	AFB II	AFB III
Rechnen mit gebrochenen Zahlen	x	x	x

HINWEISE ZUR LÖSUNG

a	b	c	a – b	c : a	a + b · c	a^2
$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$	**$\frac{1}{8}$**	**$\frac{16}{9}$**	**$\frac{13}{24}$**	**$\frac{9}{64}$**
0,3	0,15	6	**0,15**	**20**	**1,2**	**0,09**
1,2	$\frac{2}{5}$	$\frac{5}{4}$	**0,8**	**$\frac{25}{24}$**	**1,7**	**1,44**
$\frac{5}{2}$	**2,0**	**$\frac{5}{2}$**	0,5	1	**7,5**	**$\frac{25}{4}$**
0,2	$\frac{1}{10}$	**0,4**	**0,1**	2	**0,24**	0,04

KOMMENTAR

Die Aufgaben in den ersten drei Zeilen stellen basale Forderungen in Bezug auf das Rechnen mit gebrochenen Zahlen dar (verschiedene Darstellungsformen, vorteilhaftes Rechnen durch überlegtes Verwenden von Darstellungsformen, Aufgaben mit typischen Fehlerquellen, z. B. Vorrangregeln, $0{,}3^2$ usw.).

In den unteren beiden Zeilen werden zusätzlich Umkehraufgaben einbezogen.

Durch die Art der Aufgabenstellung wird auf wesentliche Lehrplanforderungen fokussiert:

- sicheres und zügiges Rechnen mit gebrochenen Zahlen,
- Rechenkontrollen durchführen,
- Lösungsverfahren darstellen.

Damit der Mannschaftswettbewerb als „fair“ empfunden wird, sind etwa „gleichstarke“ und heterogen zusammengesetzte Gruppen zu bilden. Da das Ziel des Wettbewerbs nicht nur im vollständigen Angeben der Lösungen, sondern auch im Nachweisen des „Rechnenkönnens“ bei allen Schülern besteht, wird die inhaltliche Kooperation in der Gruppe stimuliert.
Die Vorgabezeit (20 Minuten) ist für 20 Teilaufgaben bewusst knapp bemessen. Einerseits drängt dies zum zügigen Arbeiten, andererseits wird die Zeit für das Auswerten benötigt, wobei ja auch Aufgaben von Schülern jeder Mannschaft vorzurechnen sind.
Das nötigt die Schüler zum überlegten Vorgehen: Wie erreichen wir möglichst viele richtige Lösungen (Arbeitsteilung evtl. beim Rechnen, Kontrollieren und schwächere Schüler zum Vorrechnen befähigen)?
Bei der Auswertung und Ermittlung der Platzierung könnte wie folgt vorgegangen werden:

- Zunächst für jede Mannschaft die Anzahl der richtig gelösten Aufgaben bestimmen (= Anzahl der erreichten Punkte).
- Je ein Schüler aus jeder Mannschaft rechnet eine von der Lehrkraft bestimmte Aufgabe vor. Die „Vorrechenqualität“ wird von allen gemeinsam mit Punkten bewertet, z. B.: gut: +2 Punkte; mittel: +1 Punkt; mangelhaft: 0 Punkte; unzureichend: -2 Punkte.
- Das Mannschaftsmitglied, das Vorrechnen soll, wird von den anderen Mannschaften bestimmt. In der Regel werden dadurch jeweils etwa „gleich starke Schüler“ benannt. Anzustreben ist, dass auch weniger leistungsstarke Schüler „zum Zuge“ kommen.

  Diese Übungsform „Mannschaftsrechnen“ ist mit den verschiedensten Aufgaben durchführbar. Nach einiger Erfahrung pegelt sich ein zielorientiertes Arbeiten ein, das nicht nur fachspezifische Kompetenzen, sondern auch überfachliche Kompetenzen (z. B. Sprachkompetenz, Sozialkompetenz) befördert.

2.1 Realschulabschlussbezogener Unterricht

2.2.1 Schuljahrgänge 7/8

Zuckerrüben RSA 7/8 – A 1

In Sachsen-Anhalt hat die Zuckerproduktion aus Zuckerrüben eine lange Tradition. In den letzten Jahren konnten die Landwirte den Rübenertrag erheblich steigern.
Die nachfolgende Tabelle enthält Daten zur Zuckerproduktion in Sachsen-Anhalt.

	1990	1997	2004	2009
Rübenertrag in Tonnen je Hektar ($\frac{t}{ha}$)	26,2	42,5	49,7	61,1

a) Stelle die Entwicklung des Rübenertrages je Hektar von 1990 bis 2009 in einem Diagramm dar.

b) Berechne, um wie viel Prozent der Rübenertrag pro Hektar im Jahr 2009 im Vergleich mit dem Jahr 1990 gesteigert werden konnte.

c) Der Zuckergehalt von Zuckerrüben beträgt etwa 20 %.
Berechne, wie viel Tonnen Zucker im Jahr 2009 vom Rübenertrag eines Hektars hergestellt werden konnten.

d) Berechne, wie viel Hektar Zuckerrüben für die Produktion von 200 000 t Zucker angebaut werden müssen, wenn der Rübenertrag des Jahres 2009 zugrunde gelegt wird.

Zuckerrüben RSA 7/8 – H 1

EINORDNUNG IN DAS KOMPETENZMODELL

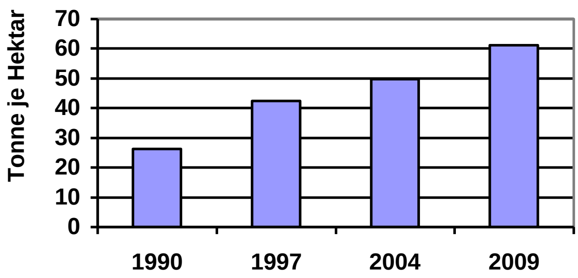
Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen				Allgemeine mathematische Kompetenzen			
$a^2=5m^2$				P	M	A	D
x				1, 3			2

Kompetenz	AFB I	AFB II	AFB III
a) Daten in geeigneten Diagrammen darstellen	x		
b) prozentuale Steigerung berechnen		x	
c) Prozentwert berechnen		x	
d) Anwendungsaufgaben mithilfe von Gleichungen lösen			x

HINWEISE ZUR LÖSUNG

a)

Entwicklung des Rübenertrags



b)

Der Rübenertrag im Jahr 1990 ist als Grundwert anzunehmen.

$$p = \frac{61{,}1 - 26{,}2}{26{,}2} \approx 1{,}33$$

Der Rübenertrag konnte um rund 133 % gesteigert werden.

c) 20 % von 61,1 $\frac{t}{ha}$ sind rund 12,2 $\frac{t}{ha}$

Im Jahr 2009 konnten vom Rübenertrag eines Hektars 12,2 Tonnen Zucker hergestellt werden.

d) Verhältnisgleichung: $\frac{x}{200\,000\text{ t}} \approx \frac{1\text{ ha}}{12{,}2\text{ t}}$; $x \approx 16\,400$ ha

Da sowohl Hektarertrag als auch Zuckergehalt Näherungswerte sind, ist das Ergebnis auf eine sinnvolle Genauigkeit zu runden. Die Größe der Anbaufläche für die Produktion von 200 000 t Zucker beträgt rund 16400 ha.

KOMMENTAR

Erfahrungsgemäß bereitet das Erkennen des Grundwertes bei prozentualen Steigerungen (prozentualen Veränderungen) sowie das Aufstellen und Lösen von Verhältnisgleichungen den Schülerinnen und Schülern Schwierigkeiten. Hier besteht erhöhter Übungsbedarf, um die im Lehrplan geforderten Kompetenzen zu entwickeln.

Aktuelles Zahlenmaterial für derartige Aufgaben findet man u. a. auf den Internetseiten des Statistischen Landesamtes von Sachsen-Anhalt (http://www.stala.sachsen-anhalt.de/).

AUFGABENVARIATIONEN

Diese Aufgabe beinhaltet eine Vielzahl von Variationsmöglichkeiten. Durch geringfügige Veränderungen in der Aufgabenstellung (Wahl anderer Bezugsgrößen) erhält man verschiedene Übungsaufgaben. Da bei den Teilaufgaben b) und d) besonderer Übungsbedarf besteht, bieten sich folgende Aufgabenvariationen an.

b_1) Berechne, um wie viel Prozent der Rübenbetrag pro Hektar im Jahr 2009 im Vergleich mit dem Jahr 1997 gesteigert werden konnte.

b_2) Berechne, auf wie viel Prozent der Rübenbetrag pro Hektar im Jahr 2009 im Vergleich mit dem Jahr 1990 gesteigert werden konnte.

d_1) Berechne die Größe der Anbaufläche für die Produktion von 200 000 t Zucker im Jahr 1997.

d_2) Berechne die Größe der Anbaufläche für die Produktion von 300 000 t Zucker im Jahr 2004.

Trapez RSA 7/8 – A2

Gegeben ist ein Trapez ABCD.

Von diesem ist bekannt:
(1) $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$
(2) $\overline{AB} = 8{,}0$ cm
(3) $\overline{AD} = \overline{BC} = \overline{CD} = 4{,}0$ cm
(4) $\alpha = \sphericalangle BAD = 60°$
(5) $\beta = \sphericalangle CBA = 60°$

a) Fertige eine Planfigur an und konstruiere das Trapez ABCD.

b) Berechne die Höhe und den Flächeninhalt des Trapezes ABCD.

c) Der Punkt M sei der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$.

Weise nach: $\Delta AMD \cong \Delta MBC$.

Trapez RSA 7/8 – H 2

EINORDNUNG IN DAS KOMPETENZMODELL

Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen				**Allgemeine mathematische Kompetenzen**			
$a^2=5m^2$				**P**	**M**	**A**	**D**
	x			2		5	1

Kompetenz	**AFB I**	**AFB II**	**AFB III**
a) Planfigur anfertigen und Trapez konstruieren	x (1)	x (2)	
b) Seitenlänge im rechtwinkligen Dreieck berechnen Flächeninhalt eines Trapezes berechnen		x x	
c) Kongruenz für zwei Dreiecke nachweisen			x

HINWEISE ZUR LÖSUNG

a) Es ist eine Planfigur zum Trapez anzufertigen, in der alle gegebenen Stücke einzutragen sind. Das gegebene Trapez ist auf unliniertem Papier zu konstruieren.

b) Die Höhe ist als Kathete in einem rechtwinkligen Dreieck zu erkennen, deren Länge mithilfe des Satzes des Pythagoras berechnet werden kann ($h \approx 3{,}5$ cm; $A \approx 20{,}8$ cm²).

c) In der Planfigur sind die Dreiecke AMD und MBC zu erkennen. Der Nachweis der Kongruenz dieser Dreiecke kann über den Kongruenzsatz SWS erfolgen.

KOMMENTAR

Diese innermathematische Aufgabe berücksichtigt eine Reihe verschiedener Kompetenzen für unterschiedliche Anforderungsbereiche.

Die Skizze in Form der Planfigur ist sowohl eine Hilfe zum Erkennen der Konstruktionsschritte als auch für das Berechnen der Höhe im Trapez sowie für den Nachweis der Kongruenz.

Die Konstruktion erfordert neben motorischen Fähigkeiten, wie genaues Messen, sicheren Umgang mit Zirkel und Geodreieck, auch das Planen und Realisieren von Konstruktionsschritten sowie die Fähigkeit, prüfen zu können, ob die Konstruktion den gegebenen Bedingungen genügt.

Für die Berechnung der Höhe ist ein rechtwinkliges Dreieck als Lösungsansatz zu finden, indem die Höhe im Trapez an geeigneter Stelle eingezeichnet wird. Die erfolgreiche Umsetzung bei den Schülerinnen und Schülern wird sicher davon abhängen, wie häufig sie diese Lernsituation erlebt haben.

Der Nachweis der Kongruenz erfordert neben sicher anwendbarem Wissen von Kongruenzsätzen auch die Fähigkeit, den Nachweis folgerichtig darstellen zu können.

Diese Aufgabe ist so angelegt, dass die Aufträge a, b und c unabhängig voneinander bearbeitet werden können.

AUFGABENVARIATIONEN

Es sind vielfältige Aufgabenvariationen möglich. So könnte die Konstruktion an einen Maßstab gebunden werden bzw. an das Anfertigen einer Konstruktionsbeschreibung. Neben der Variation der gegebenen Stücke, ergeben sich weitere inhaltliche Verknüpfungen, wenn Umfang, Symmetrie, Winkel an sich schneidenden Geraden u. a. eingebunden werden.

Das gegebene Trapez kann in drei zueinander kongruente gleichseitige Dreiecke zerlegt werden. Aus dieser speziellen Eigenschaft ergeben sich weitere Variationen (z. B. $u = 5a$ begründen lassen).

Münzen RSA 7/8 – A 3

Das Bild zeigt eine 10-Cent-Münze sowie eine 2-Euro-Münze.

Von diesen Münzen ist bekannt:

	10-Cent-Münze	2-Euro-Münze
Durchmesser	$d_1 = 19{,}75$ mm	$d_2 = 25{,}75$ mm
Dicke	1,93 mm	2,20 mm
Masse	4,10 g	8,50 g

a) In der Einführungsphase des EURO im Jahr 2002 wurden in Deutschland 0,81 Milliarden 2-Euro-Münzen geprägt.
Berechne die Masse (in Tonnen) all dieser 2-Euro-Münzen.

Berechne die Dichte (in $\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$) von 10-Cent-Münzen.

b) Der Kreis k_1 ist der Grundriss einer 10-Cent-Münze mit dem Durchmesser d_1 und dem Mittelpunkt M_1. Der Kreis k_2 ist der Grundriss einer 2-Euro-Münze mit dem Durchmesser d_2 und dem Mittelpunkt M_2. Die Kreise k_1 und k_2 können so liegen, dass sie genau einen gemeinsamen Punkt haben. Dafür gibt es zwei verschiedene Lagemöglichkeiten.

Skizziere diese beiden Möglichkeiten und berechne jeweils die Länge der Strecke $\overline{M_1M_2}$.

Münzen RSA 7/8 – H 3

EINORDNUNG IN DAS KOMPETENZMODELL

Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen				**Allgemeine mathematische Kompetenzen**			
$a^2=5m^2$			E Ē	P	M	A	D
x	x			1	1		

Kompetenz	**AFB I**	**AFB II**	**AFB III**
a) Masse in Sachsituation berechnen Dichte in Sachsituation berechnen		x	 x
b) Lagebeziehungen im Sachproblem erkennen und skizzieren Länge der Strecken berechnen	 x		x

HINWEISE ZUR LÖSUNG

a) 6 885 t beträgt die Masse all dieser geprägten 2-Euro-Münzen.

Für die Dichteberechnung muss der Zusammenhang zur Volumenberechnung eines Zylinders hergestellt werden.

Volumen der 10-Cent-Münze: V = 0,591 cm³ ; Dichte: $\rho = 6{,}94\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$

b) k_1 berührt k_2 von innen ($\overline{M_1M_2} = \frac{d_2 - d_1}{2} = 3\text{ mm}$) bzw. von außen ($\overline{M_1M_2} = \frac{d_2 + d_1}{2} = 22{,}75\text{ mm}$).

KOMMENTAR

Es werden räumliche Realobjekte Gegenstand mathematischer Modellierung, indem die Münzen als Zylinder erkannt werden müssen. Es besteht ein hoher Anspruch am inhaltlichen Durchdringen des Sachverhaltes und dem Herausfiltern der wesentlichen Informationen, die für die Berechnungen bedeutungsvoll sind. Beim Rechnen geht es um den Umgang mit großen Zahlen und dem sicheren Umrechnen von Einheiten.

Auch im Aufgabenteil b ist eine gründliche Textanalyse zum Erkennen der Lagebeziehung erforderlich.

AUFGABENVARIATIONEN

Für das Üben solcher Aufgabenstellungen bieten sich Aufgaben mit verändertem Zahlenmaterial an:

Weiteres Zahlenmaterial

	1-Euro	**50-Cent**	**20-Cent**	**5-Cent**	**2-Cent**	**1-Cent**
Durch-messer	23,25 mm	24,25 mm	22,25 mm	21,25 mm	18,75 mm	16,25 mm
Dicke	2,33 mm	2,38 mm	2,14 mm	1,67 mm	1,67 mm	1,67 mm
Masse	7,50 g	7,80 g	5,74 g	3,92 g	3,06 g	2,30 g

Anzahl (in Milliarden) der in der Einführungsphase des EURO in Deutschland geprägten Münzen

1 Euro	**50-Cent**	**20-Cent**	**10-Cent**	**5-Cent**	**2-Cent**	**1-Cent**
1,7	1,6	1,6	3,3	2,3	1,8	3,7

Die Temperatur wird in Deutschland im Alltag zumeist in Grad Celsius (kurz: °C) angegeben.

Im Physikunterricht wird auch mit der Kelvinskala gearbeitet, deren Einheit Kelvin (kurz: K) ist. Den Zusammenhang zwischen der Kelvinskala und der Celsiusskala kann man mit folgender Funktionsgleichung beschreiben: $T_K = f(T_C) = T_C + 273{,}15$

In Großbritannien wird die sogenannte Fahrenheit-Temperaturskala verwendet, deren Einheit Grad Fahrenheit (kurz: °F) ist.
Zwischen der Celsiusskala und der Fahrenheitskala besteht ein linearer Zusammenhang, und es gilt:

$$0\ °C \triangleq 32\ °F$$
$$100\ °C \triangleq 212\ °F$$

a) Gib die Schmelz- und die Siedetemperatur von Wasser in Grad Celsius und in Kelvin an.

b) Stelle den Zusammenhang zwischen den Temperaturen T_F in °F und T_C in °C in einem rechtwinkligen Koordinatensystem grafisch dar.
Hinweis: Wähle für T_C die „x-Achse“ und für T_F die „y-Achse“.

c) Berechne den Temperaturunterschied auf der Fahrenheit-Temperaturskala, wenn die Temperatur um 1 °C steigt.
Ermittle die in der Tabelle fehlenden Werte.

T_C	10 °C	
T_F		104 °F

d) Gib eine Gleichung $T_F = f(T_C)$ für die lineare Funktion f an, die den Zusammenhang zwischen beiden Temperaturskalen beschreibt.

Temperaturskalen RSA 7/8 – H 4

EINORDNUNG IN DAS KOMPETENZMODELL

Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen				**Allgemeine mathematische Kompetenzen**			
				P	**M**	**A**	**D**
		x			2		2, 3

Kompetenz	**AFB I**	**AFB II**	**AFB III**
a) Funktionswerte berechnen	x		
b) linearen Zusammenhang grafisch darstellen		x	
c) Temperaturunterschied berechnen Temperaturen für andere Skala ermitteln		x x (T_F)	 x (T_C)
d) Funktionsgleichung angeben			x

HINWEISE ZUR LÖSUNG

a) Schmelztemperatur von Wasser 0°C ≙ 273,15 K; Siedetemperatur 100°C ≙ 373,15 K

b) Es sind mindestens zwei Punkte in das Koordinatensystem einzuzeichnen, um den linearen Zusammenhang darzustellen.

c) 1°C Temperaturänderung ≙ 1,8 °F

T_C	10 °C	*40 °C*
T_F	*50 °F*	104 °F

d) Funktionsgleichung: $T_F = f(T_C) = 1{,}8 \cdot T_C + 32$

KOMMENTAR

Diese anwendungsbezogene Aufgabe ist fächerübergreifend. Sie ist praktisch relevant, da Skalen bei Größen sehr häufig vorkommen.

Neben dem Berechnen von Funktionswerten (a, c) und einem Argument (c) wird das eigenständige Entwickeln einer grafischen Darstellung verlangt. Dabei sind eine zweckmäßige Achseneinteilung und die Auswahl der einzutragenden Punkte von Bedeutung.

Der Temperaturunterschied auf der Fahrenheit-Temperaturskala kann z. B. durch inhaltliche Überlegungen ermittelt werden.

Unterschied 100°C $0\ °C \triangleq 32\ °F$ Unterschied 180°F

$100\ °C \triangleq 212\ °F$

Schlussfolgerung: 180 / 100 = 1,8 $\longrightarrow$ 1°C Temperaturänderung $\triangleq$ 1,8 °F

AUFGABENVARIATIONEN

Bei den Aufgabenvariationen bietet es sich an, den fächerübergreifenden Aspekt weiter zu nutzen. In der Physik finden sich vielfältige lineare Zusammenhänge, wie Leistung in Watt und PS oder Geschwindigkeit in $\frac{km}{h}$ und in $\frac{m}{s}$.

Beispiel:

a) Ergänze die folgende Wertetabelle!

v in $\frac{m}{s}$	10		30
v in $\frac{km}{h}$		70	

b) Beschreibe den Zusammenhang zwischen den Einheiten $\frac{m}{s}$ und $\frac{km}{h}$.

Bei einer Verkehrskontrolle von 200 Fahrzeugen wurden folgende Mängel mit der angegebenen Häufigkeit festgestellt.

Mangel	Beleuchtung	Bereifung	Warndreieck	Verbandskasten	ohne TÜV/AU	sonstige Mängel
absolute Häufigkeit	38	22	4	10	4	2

a) Stelle die Ergebnisse der Verkehrskontrolle in einem geeigneten Diagramm dar.

b) Berechne, mit welcher relativen Häufigkeit bei allen kontrollierten Fahrzeugen Beleuchtungsmängel auftreten.

c) Monika analysiert die Tabelle und sagt: „*Genau* 80 Fahrzeuge haben Mängel."
Unter welcher Bedingung ist Monikas Aussage zutreffend?

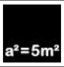
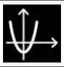
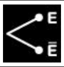
d) Erkläre mithilfe der Ergebnisse der Verkehrskontrolle, wie der Journalist zur Feststellung kommt, dass *drei Viertel* aller Mängel bei Beleuchtung und Bereifung auftreten.

> Aus einer Zeitungsmeldung
>
> ***Hauptmangel: Licht und Reifen***
> *Die gestern durchgeführte Verkehrskontrolle ergab, dass drei Viertel aller festgestellten Mängel bei Beleuchtung und Bereifung auftreten ...*

e) Bei einer anderen Verkehrskontrolle wurden in einer Stunde von 528 Fahrzeugen 33 zufällig ausgewählt und überprüft. Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Fahrzeug bei dieser Verkehrskontrolle überprüft wurde.

Erfahrungsgemäß beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass ein kontrolliertes Fahrzeug einen Mangel hat, 25 %. Berechne, mit wie viel mängelbehafteten Fahrzeugen demnach unter den 33 kontrollierten Fahrzeugen zu rechnen ist und interpretiere das Ergebnis.

EINORDNUNG IN DAS KOMPETENZMODELL

Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen				**Allgemeine mathematische Kompetenzen**			
				**P**	**M**	**A**	**D**
			x	1	3	2	2

Kompetenz	**AFB I**	**AFB II**	**AFB III**
a) Daten im geeigneten Diagramm darstellen	x		
b) Relative Häufigkeit berechnen	x		
c) Bedingung für Aussage erkennen		x	
d) Zeitungsmeldung erklären		x	
e) Wahrscheinlichkeit berechnen Wahrscheinlichkeit für Prognose anwenden und Ergebnis interpretieren		x	x

HINWEISE ZUR LÖSUNG

a) z. B. Säulendiagramm

b) relative Häufigkeit: 0,19

c) Die Aussage ist nur zutreffend, wenn jedes Fahrzeug genau einen Mangel hat, das heißt, wenn die 80 festgestellten Mängel sich genau auf 80 Fahrzeuge verteilen.

d) Bei Beleuchtung und Bereifung traten insgesamt 60 Mängel auf. $\frac{60 \text{ Mängel}}{80 \text{ Mängel}} = \frac{3}{4}$

e) $P(A)=\frac{33}{528}=0{,}0625$

25 % von 33 sind 8,25

Es ist mit rund 8 mängelbehafteten Fahrzeugen zu rechnen. Bei wiederholten Stichproben schwankt die Anzahl um 8. Die tatsächliche Anzahl der Mängelfahrzeuge kann im Einzelfall davon abweichen.

KOMMENTAR

Diese Aufgabe beinhaltet eine Alltagsproblematik, wie sie nicht selten in Berichterstattungen vorkommt. Sie verlangt, Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik inhaltlich anzuwenden. Dem dienen insbesondere die Aufgabenteile c), d) und e). Solchen kritischen Hinterfragungen und Interpretationen sollte gebührend Aufmerksamkeit geschenkt werden.

Die Aufgabe bietet darüber hinaus Substanz für das fächerübergreifende Arbeiten, insbesondere zum Thema „Sicher und gesund durch den Straßenverkehr".

AUFGABENVARIATIONEN

Diese Aufgabe kann vielfältig variiert werden, z. B. in den Teilaufgaben wie folgt:

a) Daten mithilfe eines Diagramms vorgeben; Diagrammtyp vorgeben

b) relative Häufigkeiten für das Auftreten weiterer Mängel oder Mängelgruppen berechnen lassen.

c) andere Aussagen diskutieren lassen, z. B. „Mindestens 80 Fahrzeuge haben Mängel"

e) Wahrscheinlichkeit für andere Ereignisse berechnen, z. B., dass ein Fahrzeug bei einer Verkehrskontrolle nicht überprüft wird

Wertvolle Variablen RSA 7/8 – A 6

a) Berechne die Werte der Terme $T_1 = n^2$ bzw. $T_2 = (n + 1)^2$ für n = 1; 2; 3; 4; 5 sowie die Differenz $T_2 – T_1$.
Welche Regelmäßigkeit ist bei der Folge der Differenzen zu erkennen? Setze die Folge der Differenzen um zwei weitere Glieder fort und prüfe durch Nachrechnen.

b) Berechne den Wert des Terms $2m^4 – m^2 + 15$ für m = 1; 2 und 3.
Welche Zahl ist für m jeweils zu wählen, damit der Wert des Terms 1240; 4768 bzw. 19915 ist?

c) Gib zwei weitere Gleichungen an, die die Regelmäßigkeit der gegebenen vier Gleichungen fortsetzen.

$$1^2 + 2 = 2^2 – 1$$
$$2^2 + 3 = 3^2 – 2$$
$$3^2 + 4 = 4^2 – 3$$
$$4^2 + 5 = 5^2 – 4$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Schreibe die Gesetzmäßigkeit mithilfe der Variablen n auf.

Wertvolle Variablen RSA 7/8 – H 6

EINORDNUNG IN DAS KOMPETENZMODELL

Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen				**Allgemeine mathematische Kompetenzen**			
$a^2=5m^2$			E Ē	P	M	A	D
x				2	2		3

Kompetenz	**AFB I**	**AFB II**	**AFB III**
a) Termwerte und -differenzen berechnen	x		
eine Gesetzmäßigkeit erkennen und überprüfen		x	
b) Termwerte berechnen	x		
Variablenbelegungen ermitteln		x	
c) Regelmäßigkeit erkennen und die Gesetzmäßigkeit mit Variablen angeben		x	x

HINWEISE ZUR LÖSUNG

a)

n	1	2	3	4	5		6	7
T_1	1	4	9	16	25		36	49
T_2	4	9	16	25	36		49	64
$T_2 - T_1$	3	5	7	9	11		13	15

Die Differenzen sind aufeinanderfolgende ungerade Zahlen.

b)

m	1	2	3		5	7	10
T	16	43	168		1240	4768	19915

c) $5^2 + 6 = 6^2 - 5$; $6^2 + 7 = 7^2 - 6$
$n^2 + (n + 1) = (n + 1)^2 - n$ für $n > 0$

KOMMENTAR

Die Aufgabe zielt insbesondere auf die Entwicklung von Kompetenzen im Umgang mit Termen ab, wobei nicht etwa technisch aufwändige Termumformungen im Fokus der Aufgabe stehen. Vielmehr wird elementares Berechnen von Termwerten verknüpft mit Aufträgen zum Beurteilen des Verhaltens elementarer Zahlenfolgen (hier soll der Schüler gedanklich das rekursive Fortschreiben der vorliegenden Folge vollziehen und dann überprüfen) wie auch dem Darstellen expliziter Bildungsvorschriften unter Verwendung von Variablen.

Im Aufgabenteil b) geht es nach dem Berechnen der ersten drei Termwerte nicht um Fortsetzen des Berechnens, um auf diesem Wege schließlich die Lösung zu finden. Vielmehr sollten die Schüler überlegt „Startwerte“ auswählen. So wird für den Termwert 19915 zum einen eine Variablenbelegung in Frage kommen, die „etwas ferner“ von der 3 liegt und zum anderen in Beziehung zu einer durch fünf oder zehn teilbaren Zahl steht.

Bei c) sollte darauf geachtet werden, dass je nach „Startwert“ für n die Beschreibung der Gesetzmäßigkeit unterschiedlich sein kann, z. B. für $n > 1$: $(n - 1)^2 + n = n^2 - (n - 1)$.

AUFGABENVARIATIONEN

Mögliche Variationen innerhalb des isolierten Berechnens von Termwerten leiten sich aus folgenden Überlegungen ab:

- *Struktur des Terms*

  nur Grundrechenoperationen $1{,}5m - 15$; $1{,}5(m - 7) - 2(m + 7) + 15$

  Komplexität der Potenzbildungen $2m^3 - m + 15$; $-(m - 7)^4 - (m - 7)^2 + 15$

  Anzahl der Variablen $0{,}015(a - 7)^4 - (b - 7)^2 + 15$

- *verwendetes Zahlen*material ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}_+$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$))

- *Ausweiten des Umkehrens von Denkoperationen*

  Prüfe, für welche natürlichen Zahlen gilt: $n \cdot n = 10$, $n \cdot n = 1$, $(n + 2) \cdot (n - 3) = 0$, …

Mögliche Variationen innerhalb des isolierten Aufstellens von Termen oder Gleichungen:

- *„gängige" Übersetzungen häufig auftretender Redewendungen (AFB I)*

  die Hälfte, ein Viertel, … von
  gerade Zahl, ungerade Zahl, Vorgänger, Nachfolger
  etwas vermehren bzw. vermindern

- *Verwenden „gängiger" Übersetzungen beim Aufstellen von Gleichungen (AFB I/II)*

  Von welcher natürlichen (gebrochenen, ganzen, …) Zahl ist das Doppelte genauso groß wie ihr Quadrat?

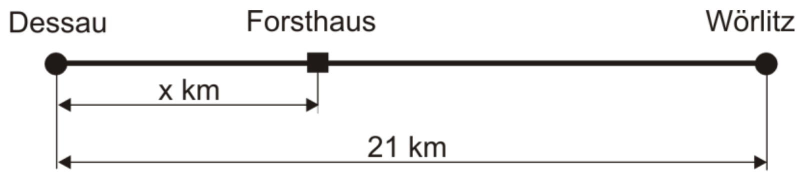
  Die Summe aus einer ungeraden Zahl und ihrem Nachfolger beträgt 23. Wie heißt die Zahl?

  Daniel kauft vier Flaschen Limonade zu einem Preis von je 1,20 € und zwei Flaschen Bananensaft. Dafür muss er an der Kasse 7,80 € bezahlen. Wie teuer ist eine Flasche Bananensaft?

2.2.2 Schuljahrgänge 9/10

Fahrradtour RSA 9/10 – A 1

Am Fürst-Franz-Weg zwischen Wörlitz und Dessau liegt das Forsthaus „Leiner Berg“ (Lageskizze mit Entfernungen - siehe Bild).



Die Familien Müller und Schulze wollen sich am Forsthaus treffen. Sie fahren dorthin mit dem Fahrrad und beide haben eine Durchschnittsgeschwindigkeit von 10 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Familie Müller startet in Dessau und Familie Schulze in Wörlitz.
Familie Müller benötigt bis zum Forsthaus drei Viertel der Zeit, die die Familie Schulze benötigt.

a) Erklären Sie, was der Term $21 - x$ beschreibt.

Familie Schulze benötigt y Stunden bis zum Forsthaus.
Geben Sie die Zeit, die Familie Müller bis zum Forsthaus benötigt, in Abhängigkeit von y an.

b) Die Entfernung x (in km) und die Zeitdauer y (in h) können mithilfe des folgenden Gleichungssystems berechnet werden.

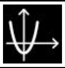
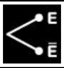
$$\begin{aligned} 4x - 30y &= 0 \\ \underline{\;x + 10y} &\underline{\;= 21} \end{aligned}$$

Lösen Sie dieses Gleichungssystem.

c) Ermitteln Sie, wann Familie Müller spätestens abfahren muss, wenn sich die Familien Müller und Schulze um 10.00 Uhr am Forsthaus treffen wollen.

Fahrradtour RSA 9/10 – H 1

EINORDNUNG IN DAS KOMPETENZMODELL

Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen				**Allgemeine mathematische Kompetenzen**			
$a^2 = 5m^2$				**P**	**M**	**A**	**D**
x		x		3	2		

Kompetenz	**AFB I**	**AFB II**	**AFB III**
a) Term erklären bzw. aufstellen		x	
b) lineares Gleichungssystem lösen	x		
c) Ergebnis innerhalb des Modells auf Sachverhalt anwenden			x

HINWEISE ZUR LÖSUNG

a) Der Term 21 – x gibt die Entfernung zwischen dem Forsthaus und Wörlitz an.

Der Term $\frac{3}{4}y$ gibt die Fahrzeit von Familie Müller an.

b) $x = 9$ und $y = 1{,}2$

c) Familie Müller muss spätestens um 9.06 Uhr in Dessau abfahren.

KOMMENTAR

Derartige „Übersetzungsaufgaben“ (beginnend mit Aufgabenteil a) sind sowohl inhaltlich als auch formal für das mathematische Verständnis eine notwendige Bedingung. Die Erfahrungen zeigen, dass nicht wenige Schülerinnen und Schüler hier einen besonderen Übungsbedarf haben.

Dies zeigt sich insbesondere auch bei der sachverhaltsbezogenen Interpretation der im Aufgabenteil b) ermittelten Lösung (innerhalb des Modells).

AUFGABENVARIATIONEN

Sofern bei den Aufgabenteilen a) und c) besonderer Übungsbedarf erkannt wird, bietet sich die Möglichkeit an, gezielt die gegebenen Größen[6] sowie ihre Zusammenhänge zu ändern, einschließlich des Veränderns von Variablenbezeichnungen. Die Auswirkungen auf das Gleichungssystem sind dabei zu beachten.

Im folgenden Beispiel führt die Variation zu etwas erhöhten Anforderungen, z. B. im Aufgabenteil a) beim Beschreiben der Fahrzeit der Familie Schulze in Abhängigkeit von b.

Beispiel:

Im Eingangstext bzw. Abb. verändern:

Entfernung Dessau - Wörlitz: 21 km; Entfernung Forsthaus - Wörlitz: a km

Familie Müller benötigt bis zum Forsthaus vier Fünftel der Zeit, die die Familie Schulze benötigt.

a) Erklären Sie, was der Term $21 - a$ beschreibt.
   Familie Müller benötigt b Stunden bis zum Forsthaus.
   Geben Sie die Zeit, die Familie Schulze bis zum Forsthaus benötigt, in Abhängigkeit von b an.

b) Die Entfernung a (in km) und die Zeitdauer b (in h) können mithilfe des folgenden Gleichungssystems berechnet werden.

$$\begin{aligned} 2a - 25b &= 0 \\ \underline{a + 10b} &\underline{= 21} \end{aligned}$$

   Lösen Sie dieses Gleichungssystem.

c) Ermitteln Sie, wann Familie Schulze spätestens abfahren muss, wenn sich die Familien Müller und Schulze um 11.00 Uhr am Forsthaus treffen wollen.

[6] Diese Aufgabenvariation entspricht dann freilich nicht mehr vollständig der Realsituation „Fürst-Franz-Weg“. Um einen Wiedererkennungswert und Übungseffekt zu haben, scheint dies u. E. vertretbar.

Flughafenkontrollen RSA 9/10 – A 2

Auf dem Flughafen Halle-Leipzig werden für Reisen innerhalb der EU stichprobenartig Passkontrollen und Zollkontrollen unabhängig voneinander durchgeführt.
Im Folgenden wird angenommen, dass Passkontrollen mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,2 und Zollkontrollen mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,3 stattfinden.

a) Zeichnen Sie ein Baumdiagramm für diesen Sachverhalt und tragen Sie die Wahrscheinlichkeiten an allen Pfaden an.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einem Fluggast genau eine Kontrolle erfolgt.

c) Mit einem Flugzeug kommen 150 Fluggäste an.
Berechnen Sie, wie viele dieser Fluggäste wahrscheinlich sowohl die Pass- als auch die Zollkontrolle durchlaufen werden.

Flughafenkontrollen RSA 9/10 – H 2

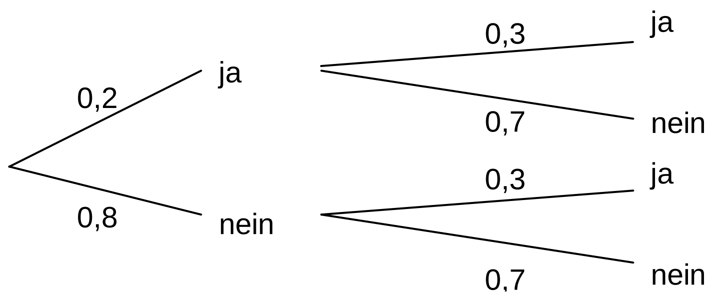
EINORDNUNG IN DAS KOMPETENZMODELL

Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen				**Allgemeine mathematische Kompetenzen**			
$a^2=5m^2$			E Ē	P	M	A	D
			x			2	2

Kompetenz	**AFB I**	**AFB II**	**AFB III**
a) Baumdiagramm zeichnen und Pfadwahrscheinlichkeiten angeben		x	
b) Pfadregeln beim Berechnen von Wahrscheinlichkeiten anwenden		x	
c) Anzahl der wahrscheinlich kontrollierten Fluggäste berechnen			x

HINWEISE ZUR LÖSUNG

a) z. B. Passkontrolle Zollkontrolle



Das Baumdiagramm kann auch mit der Zollkontrolle begonnen werden.

b) Wahrscheinlichkeit für genau eine Kontrolle:

Das bedeutet: Es kommen zwei Pfade in Frage: Passkontrolle ja, Zollkontrolle nein <u>und</u> Passkontrolle nein, Zollkontrolle ja. $\Rightarrow$ P = 0,2 · 0,7 + 0,8 · 0,3 = 0,38

c) Berechnung der Wahrscheinlichkeit, dass sowohl eine Pass- als auch eine Zollkontrolle durchgeführt wird: 0,2 · 0,3 = 0,06

Berechnung der Anzahl der Passagiere, die wahrscheinlich kontrolliert werden:

150 Passagiere · 0,06 = 9 Passagiere

KOMMENTAR

Das Zeichnen eines zugehörigen Baumdiagramms erfordert ein Grundverständnis des Sachverhalts. Pfade und Stufen müssen benannt werden.

Bei den Aufgabenstellungen zur Wahrscheinlichkeitsberechnung sind die Worte „genau eine …“ und „sowohl als auch …“ richtig zu interpretieren und bei der Zuordnung der Pfadregeln anzuwenden.

AUFGABENVARIATIONEN

zu a) In Übungsaufgaben kann das Erstellen von Baumdiagrammen insofern variiert werden, dass die Anzahl der Pfade je Stufe auch größer als zwei sein könnte. Denkt man da z. B. an die üblichen Aufgaben: „In einem Gefäß befinden sich drei blaue, zwei gelbe und eine weiße Kugel …“. Jedoch sollte die Anzahl der Stufen bei den im Lehrplan geforderten zwei bleiben.

zu b) Wichtig ist bei den Aufgabenbeispielen, dass möglichst vielseitig logische Bestandteile der Sprache sachgerecht gebraucht werden, wie z. B.: „genau ein …“, „mindestens ein …“, „höchstens ein …“.

Aufgabenbeispiel:

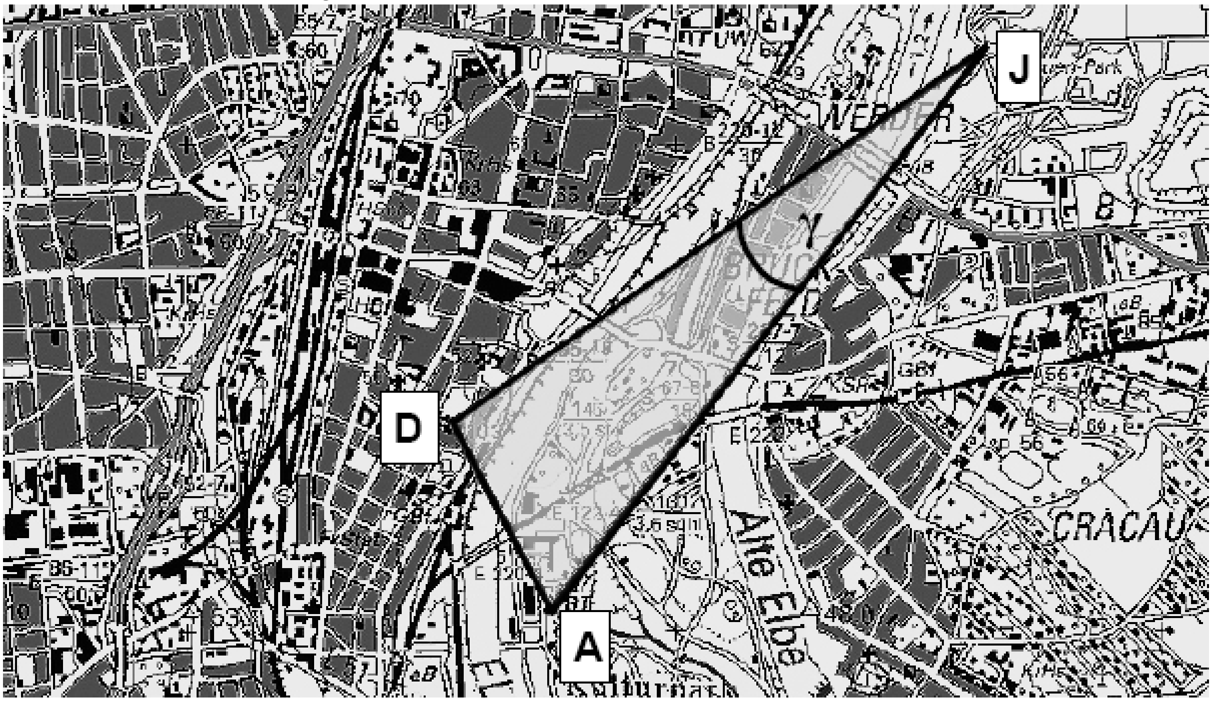
Der Lehrling Peter muss nach dem 1. Lehrjahr jeweils eine Prüfung in den Fächern Technisches Zeichnen und Informatik absolvieren. Von den 20 Prüfungsthemen im Fach Technik hat er 18 gelernt. Für die Informatikprüfung hat er nur 10 der 15 Themen geschafft. Am Prüfungstag muss er für jedes Fach ein Thema ziehen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er

- keines der gezogenen Themen gelernt hat,
- genau eines der gezogenen Themen gelernt hat,
- mindestens eines der gezogenen Themen gelernt hat?

In Abwandlung der Aufgabe könnte auch stehen, dass Peter nur 90 % der Technikfragen gelernt hat.

Magdeburger Türme RSA 9/10 – A 3

Das Bild zeigt einen Ausschnitt aus einer Karte des Stadtzentrums von Magdeburg. Der Dom (D), der Jahrtausendturm im Elbauenpark (J) und der Aussichtsturm im Kulturpark (A) sind besondere Sehenswürdigkeiten.



Die Punkte A, J und D bilden auf der Karte ein Dreieck, von dem folgende Daten bekannt sind:

$\overline{AJ} = 2890$ m $\overline{DJ} = 2670$ m $\gamma = ∢DJA = 17{,}0°$.

a) Berechnen Sie die Entfernung des Aussichtsturms vom Dom (Länge der Strecke $\overline{AD}$).
b) Konstruieren Sie das Dreieck AJD im Maßstab 1 : 50 000.
c) Klaus vermutet auf Grund der Konstruktion, dass das Dreieck AJD rechtwinklig ist. Untersuchen Sie, ob die Vermutung von Klaus eine wahre Aussage ist.

Magdeburger Türme RSA 9/10 – H 3

EINORDNUNG IN DAS KOMPETENZMODELL

Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen				**Allgemeine mathematische Kompetenzen**			
$a^2=5m^2$				P	M	A	D
	x			3		4	1

Kompetenz	AFB I	AFB II	AFB III
a) Streckenlänge mit Kosinussatz berechnen		x	
b) Dreieck maßstäblich konstruieren		x	
c) Aussage auf Wahrheit untersuchen			x

HINWEISE ZUR LÖSUNG

a) $\overline{AD}^2 = \overline{AJ}^2 + \overline{DJ}^2 - 2 \cdot \overline{AJ} \cdot \overline{DJ} \cdot \cos\gamma$

Ergebnis: Die Entfernung des Doms zum Aussichtsturm beträgt rund 850 m.

b) 1 cm $\triangleq$ 500 m . Daraus ergibt sich: $\overline{AJ} \triangleq$ 5,8 cm; $\overline{DJ} \triangleq$ 5,3 cm.

c) Zum Beispiel: Angenommen, es ist ein rechtwinkliges Dreieck ($\sphericalangle ADJ = 90°$), dann müsste der Satz des Pythagoras gelten:

$2890^2 = 2670^2 + 850^2$ bzw. $8352100 = 7851400 \Rightarrow$ Die Aussage ist falsch.

KOMMENTAR

Diese Aufgabe erfordert Grundwissen bei der Anwendung des Kosinussatzes sowie das Anwenden des Maßstabes.

Die Teilaufgaben a) und b) bieten eine Möglichkeit der „gegenseitigen" Kontrolle.

Für die Teilaufgabe c) reicht eine Argumentation mithilfe der Konstruktion nicht aus. Es gibt mehrere Argumentationsmöglichkeiten. So könnte z. B. der in Frage kommende Winkel ADJ berechnet werden (96,3°). Bei Verwendung des Sinussatzes ist zu beachten, dass es zwei Ergebnisse gibt, von denen die Lösung mithilfe der Seiten-Winkel-Beziehung zu identifizieren ist.

AUFGABENVARIATIONEN

Die Aufgabe kann dahingehend erweitert werden, dass weitere Größen zu berechnen sind, z. B. $\sphericalangle ADJ$, $\sphericalangle JAD$, Flächeninhalt des Dreiecks AJD.

Variationen des Aufgabenteils b) könnten sein:

- Konstruieren Sie das Dreieck AJD in einem selbstgewählten Maßstab und geben Sie diesen an.
- Beschreiben Sie die Konstruktion des Dreiecks AJD.

Funktionenmix RSA 9/10 – A 4

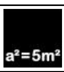
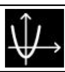
Gegeben sind eine lineare Funktion f mit y = f(x) und eine quadratische Funktion g mit y = g(x) jeweils mit $x \in R$.
- Die Funktion f hat die Nullstelle –2 und ihr Graph geht durch den Punkt A(0; –2).
- Die Funktionsgleichung von g ist $y = g(x) = x^2 - 3$.

a) Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen f und g in ein und dasselbe Koordinatensystem im Intervall $-2{,}5 \leq x \leq 2{,}5$.
Geben Sie für die Funktion f eine Funktionsgleichung an.

b) Berechnen Sie die Koordinaten desjenigen Schnittpunktes der Graphen der Funktionen f und g, der im III. Quadranten liegt.

Funktionenmix RSA 9/10 – H 4

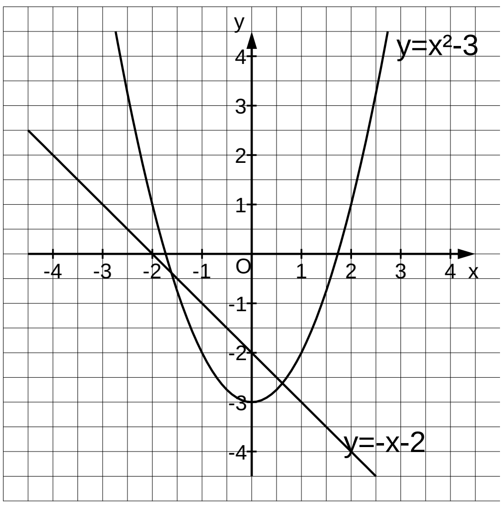
EINORDNUNG IN DAS KOMPETENZMODELL

Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen				**Allgemeine mathematische Kompetenzen**			
				P	M	A	D
		x		3			4

Kompetenz	**AFB I**	**AFB II**	**AFB III**
a) Graphen einer linearen und einer quadratischen Funktion zeichnen Funktionsgleichung ermitteln	x 	 x	
b) Koordinaten eines Schnittpunktes der beiden Funktionen berechnen			x

HINWEISE ZUR LÖSUNG

a)



$y = f(x) = -x - 2$

b)
$x^2 - 3 = -x - 2 \rightarrow x^2 + x - 1 = 0$
$x_1 = 0{,}6 \longrightarrow y_1 = -2{,}6$
$x_2 = -1{,}6 \longrightarrow y_2 = -0{,}4$
Da der Punkt im III. Quadrant liegen soll, lautet die Lösung: (–1,6 ; –0,4).

KOMMENTAR

In dieser Aufgabe werden Grundanforderungen aus dem Kompetenzschwerpunkt „Zuordnungen und Funktionen“ wie das Zeichnen einer linearen und einer quadratischen Funktion verlangt. Da die Aufgabe nicht fordert, die Graphen <u>genau</u> innerhalb des gegebenen Intervalls zu zeichnen, ist das Darstellen im vorgegebenen Intervall auch dann erfüllt, wenn die Graphen über die gegebenen Intervallgrenzen hinaus gezeichnet sind.

Das Beherrschen wichtiger Begriffe wie Nullstelle, Punkt, Koordinaten und Quadranten ist Voraussetzung für ein erfolgreiches Bearbeiten.

Das Berechnen der Koordinaten eines Schnittpunktes führt auf das Lösen einer quadratischen Gleichung. Im Ergebnis muss durch Vorgabe des Quadranten eine Lösung ausgeschlossen werden. Die Kontrollmöglichkeit für eine rechnerische Lösung mithilfe einer graphischen Darstellung sollte Schülern immer wieder verdeutlicht werden.

Der Aufgabenteil b) erfordert kein formales Aufstellen und Lösen eines nichtlinearen Gleichungssystems. Vielmehr geht es um ein inhaltliches Erschließen, dass $f(x) = g(x)$ gilt (AFB III).

AUFGABENVARIATIONEN

Vielfältige Variationen ergeben sich durch Einbeziehung weiterer Begriffe und Funktionsgleichungen der Form $y = x^2 + px + q$ bzw. $y = (x + d)^2 + e$.

<u>Beispiel:</u>

Gegeben ist eine lineare Funktion f mit $y = f(x)$ und eine quadratische Funktion g mit $y = g(x)$ jeweils mit $x \in R$.

- Der Graph der Funktion f verläuft durch den Punkt A(2; –1) und hat den Anstieg –2.
- Die Normalparabel der quadratischen Funktion g hat den Scheitelpunkt S(–1; –4) und ist nach oben geöffnet.

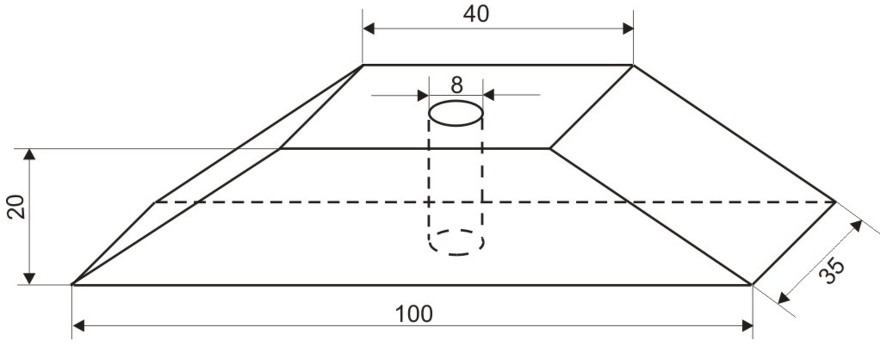
a) Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen f und g in ein und dasselbe Koordinatensystem im Intervall $-4 \le x \le 1$.

b) Geben Sie für die Funktionen f und g je eine Funktionsgleichung an.

c) Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion g.

Bauständer RSA 9/10 – A 5

Beim Aufstellen von Bauzäunen werden Ständer benutzt. Die Ständer haben die Form eines Prismas. In der Mitte des Ständers befindet sich eine zylindrische Bohrung.



Längenangaben in cm (nicht maßstäblich)

a) Berechnen Sie das Volumen des Grundkörpers (Ständer ohne Bohrung).

b) Beschreiben Sie eine zweite Vorgehensweise zur Lösung der Teilaufgabe a).

c) Berechnen Sie das Volumen eines solchen Ständers.

d) Stellen Sie einen solchen Ständer in senkrechter Zweitafelprojektion im Maßstab 1 : 10 dar.

Bauständer RSA 9/10 – H 5

EINORDNUNG IN DAS KOMPETENZMODELL

Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen				**Allgemeine mathematische Kompetenzen**			
$a^2=5m^2$				P	M	A	D
	x			5			1

Kompetenz	**AFB I**	**AFB II**	**AFB III**
a) Volumen eines Prismas berechnen		x	
b) einen weiteren Lösungsweg für a) beschreiben			x
c) Volumen des Ständers berechnen		x	
d) Körper als Zweitafelbild maßstäblich darstellen		x	

HINWEISE ZUR LÖSUNG

a) z. B. Trapez (Grundfläche des Prismas): $A_G = \frac{1}{2} \cdot (40\text{ cm} + 100\text{ cm}) \cdot 20\text{ cm} = 1400\text{ cm}^2$

Volumen Prisma: $V_P = 1400\text{ cm}^2 \cdot 35\text{ cm} = 49\,000\text{ cm}^3$

b) z. B. Prisma in einen volumengleichen Quader „umwandeln“:

$V_Q = 70\text{ cm} \cdot 20\text{ cm} \cdot 35\text{ cm} = 49\,000\text{ cm}^3$

c) Volumen Zylinder: $V_Z = \pi \cdot (4\text{ cm})^2 \cdot 20\text{ cm} = 1005{,}3\text{ cm}^3$

Volumen des Ständers: $V = 47\,994{,}7\text{ cm}^3$

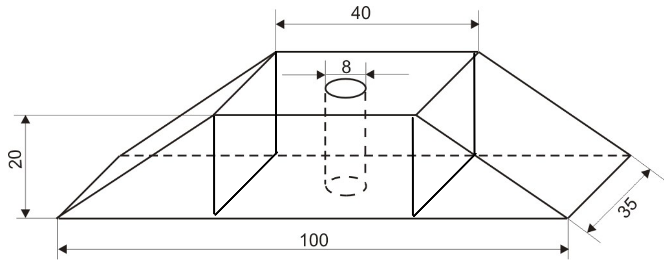
d) Im Zweitafelbild ist beim Aufriss die „Nichtsichtbarkeit“ der zylindrischen Bohrung zu beachten.

KOMMENTAR

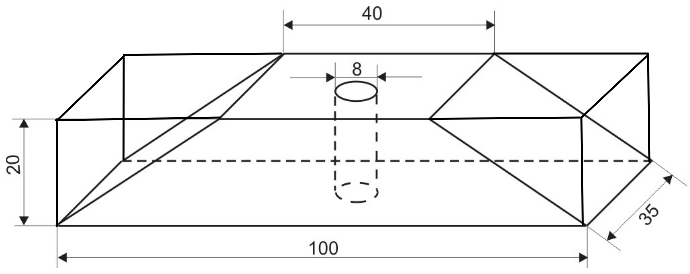
Die Volumenberechnung erfordert in mehrerer Hinsicht eine sorgfältige Analyse. Hier muss ein Lösungsplan entwickelt werden, der die einzelnen Teilberechnungen umfasst. Innerhalb dieser Teilschritte ist auf eine korrekte Zuordnung der Höhen Wert zu legen.

Das Berechnen des Volumens des Prismas lässt vielfältige Lösungsvarianten zu. Zum einen kann das Prisma mit seiner trapezförmigen Grundfläche insgesamt erfasst werden (siehe Hinweise zur Lösung). Es gibt aber auch die Möglichkeiten über Quader und Prismen mit dreieckiger Grundfläche zum Ergebnis zu kommen, als zusammengesetzter Körper oder Restkörper.

zusammengesetzter Körper



Restkörper



Bezüglich des verwendeten Rechenweges lohnt sich im Nachhinein eine Diskussion über weitere Varianten bzw. über die Effektivität.

Bei der Erstellung des Zweitafelbildes ist zunächst das richtige Anwenden des vorgeschriebenen Maßstabes von Bedeutung. Für das korrekte Einzeichnen der Bohrung in den Grundriss ist zunächst der Mittelpunkt als „Hilfspunkt" erforderlich (z. B. als Schnittpunkt von Diagonalen).

AUFGABENVARIATIONEN

Aufgaben zur Körperberechnung geben zumeist viel Spielraum zur Verknüpfung mit anderen Kompetenzen, wie z. B. dem Messen, der Prozentrechnung oder der Dichteberechnung.

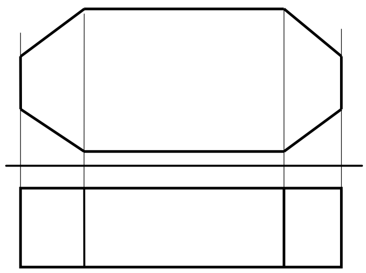
Die hier angegebene Variation beschränkt sich auf den Schwerpunkt der Ausgangsaufgabe: Lösungsvielfalt bei der Volumenberechnung.

Im zeichnerischen Bereich könnten auch Transformationen in umgekehrter Richtung vorgenommen werden – von der senkrechten Zweitafelprojektion zum Schrägbild.

Die Aufgaben sollten auch die Freiheit lassen, selbst geeignete Maßstäbe zu finden und diese anzugeben bzw. statt des Zeichnens das Skizzieren zu fordern.

<u>Beispiel</u>

Im Bild ist ein Werkstück im Maßstab 1: 50 dargestellt.



Skizzieren Sie das Schrägbild des in senkrechter Zweitafelprojektion dargestellten Werkstücks.

Berechnen Sie das Volumen dieses Werkstücks. Entnehmen Sie die erforderlichen Maße dem Zweitafelbild.

Elementares – hilfsmittelfrei, schnell und richtig RSA 9/10 – A 6

Lösen Sie die folgenden Aufgaben ohne Taschenrechner und Tafelwerk.
Zeitvorgabe: 10 Minuten

Nr.	Aufgabe	Lösung, Ergebnis, Antwort
1	Berechnen Sie. a) $8 : 100 - 2$	
	b) $0{,}125 \cdot 0{,}3 \cdot 8$	
	c) $\frac{1}{5} \cdot 10 - 0{,}2^2$	
2	a) 0,5 kg + 30 g + 50 mg = **x** g	**x** = ……………
	b) 1,25 h = **y** min	**y** = ……………
	c) 10 g von 200 g sind **z** %.	**z** = ……………
3	Stellen Sie die Gleichung $V = \frac{1}{3}a^2h$ nach h um.	
4	Ein Quader hat die Seitenlängen x, y und z. Geben Sie jeweils eine Gleichung für den Oberflächeninhalt A_o und das Volumen V dieses Quaders an.	$\mathbf{A_o}$ = ………………………… **V** = ……………………………
5	Geben Sie ein Beispiel für das *Distributivgesetz* an.	
6	Die relative Häufigkeit für Verspätungen beim Nutzen öffentlicher Verkehrsmittel beträgt 20 %. Geben Sie an, wie oft ein Kunde, der im Monat 50-mal öffentliche Verkehrsmittel nutzt, mit einer Verspätung rechnen muss.	
7	Geben Sie die Koordinaten des Scheitelpunktes des Graphen der quadratischen Funktion mit der Gleichung $y = x^2 - 2{,}5$ an.	S(……..; ……..)

Elementares – hilfsmittelfrei, schnell und richtig RSA 9/10 – H 6

EINORDNUNG IN DAS KOMPETENZMODELL

Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen				**Allgemeine mathematische Kompetenzen**			
$a^2=5m^2$			E Ē	P	M	A	D
x	x	x	x	3			

Kompetenz	**AFB I**	**AFB II**	**AFB III**
Basiskompetenzen	x		

HINWEISE ZUR LÖSUNG

1. a) –1,92 b) 0,3 c) 1,96
2. a) x = 530,050 b) y = 75 c) z = 5
3. $h = \frac{3V}{a^2}$ 4. z. B. $A_o = 2xy + 2xz + 2yz$ $V = x \cdot y \cdot z$
5. z. B.: $3 \cdot (4 + 6) = 3 \cdot 4 + 3 \cdot 6$
6. 10-mal 7. S(0; –2,5)

KOMMENTAR

Die Aufgaben stellen ausschließlich basale Anforderungen, die von den Schülern durch unmittelbares Anwenden von sicher reproduzierbarem Wissen und Können schnell und korrekt gelöst werden sollten. Deshalb ist hier neben sachlicher Richtigkeit auch auf das Einhalten der Zeitvorgabe zu achten.

Die Zusammenstellung derartiger Aufgaben zielt sehr bewusst auf Vielfalt. Das bezieht sich zunächst auf das Berücksichtigen von inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzen aus allen vier Inhaltsbereichen. Ferner meint Vielfalt in diesem Zusammenhang, dass nicht nur das „formale Zahlenrechnen“ berücksichtigt werden sollte, sondern dabei auch inhaltliche Aspekte wie z. B. das Verständnis von Begriffen, Sätzen und Verfahren einbezogen werden. Beispiele dafür sind hier das bewusste Nutzen von Rechenvorteilen (wie bei Aufgabe 1b), der verständige Umgang mit Formeln (Aufgabe 4) und das Grundverständnis von Begriffen und Eigenschaften (Aufgaben 5, 6 und 7).

AUFGABENVARIATIONEN

Variationsmöglichkeiten sind hier offenkundig.

2.3 Hauptschulabschlussbezogener Unterricht

2.3.1 Schuljahrgänge 7/8

Zuckerrüben HSA 7/8 – A 1

In Sachsen-Anhalt hat die Zuckerproduktion aus Zuckerrüben eine lange Tradition. In den letzten Jahren konnten die Landwirte den Rübenertrag erheblich steigern.
Die nachfolgende Tabelle enthält Daten zur Zuckerproduktion in Sachsen-Anhalt.

	1990	1997	2004	2009
Rübenertrag in Tonnen je Hektar ($\frac{t}{ha}$)	26,2	42,5	49,7	61,1

a) Stelle die Entwicklung des Rübenertrages je Hektar von 1990 bis 2009 in einem Diagramm dar.

b) Berechne, wie viel Tonnen Rüben je Hektar im Jahr 2009 im Vergleich mit dem Jahr 1990 mehr geerntet werden konnten.
Gib diesen Mehrertrag in Prozent bezogen auf den Ertrag von 1990 an.

c) Der Zuckergehalt von Zuckerrüben beträgt etwa 20 %.
Berechne, wie viel Tonnen Zucker im Jahr 2009 vom Rübenertrag eines Hektars hergestellt werden konnten.

d) Robert hat unter Verwendung des Ergebnisses von c) die Verhältnisgleichung $\frac{12{,}2\ t}{1\ ha} = \frac{100\ t}{x}$ aufgestellt.
Erkläre, was er mit x ausrechnen möchte.

Zuckerrüben HSA 7/8 – H 1

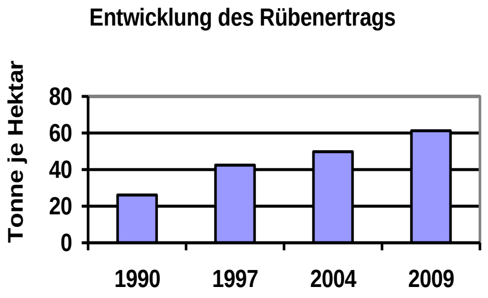
EINORDNUNG IN DAS KOMPETENZMODELL

Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen				**Allgemeine mathematische Kompetenzen**			
$a^2=5m^2$				P	M	A	D
x				1,3			2, 3

Kompetenz	AFB I	AFB II	AFB III
a) Daten in geeignetem Diagramm darstellen	x		
b) Prozentsatz in einem Sachverhalt berechnen		x	
c) Prozentwert in einem Sachverhalt berechnen		x	
d) Inhaltliche Bedeutung einer Variablen in einer Verhältnisgleichung erkennen			x

HINWEISE ZUR LÖSUNG

a) z. B.



b) $61{,}1\ \frac{t}{ha} - 26{,}2\ \frac{t}{ha} = 34{,}9\ \frac{t}{ha}$

$\frac{34{,}9}{26{,}2} \approx 1{,}33$

Es wurden rund 133 % mehr Rüben geerntet.

c) 20 % von 61,1 $\frac{t}{ha}$ sind rund 12,2 $\frac{t}{ha}$. Im Jahr 2009 konnten vom Rübenertrag eines Hektars 12,2 Tonnen Zucker hergestellt werden.

d) Die Variable x gibt die Größe der Anbaufläche für die Produktion von 100 t Zucker an (bezogen auf den Rübenertrag im Jahr 2009).

KOMMENTAR

Diese Aufgabe ist in Teilaufträge unterteilt, die bis auf Aufgabe d) unabhängig voneinander gelöst werden können. Das Auswählen und Zeichnen des Diagramms, die Berechnungen zur Prozentrechnung (Prozentsatz, Prozentwert berechnen) sowie das Aufstellen und Lösen von Gleichungen stellen vielfältige Anforderungen dar.

AUFGABENVARIATIONEN

Aufgaben zur Prozentrechnung ermöglichen es relativ unkompliziert, aktuelles Datenmaterial mit Regionalbezug völlig analog zu verwenden.

Dazu bieten sich Angaben aus Tageszeitungen oder aus dem Internet an (Medienkompetenz; siehe z. B. die Internetseiten des Statistischen Landesamtes von Sachsen-Anhalt http://www.stala.sachsen-anhalt.de/).

Trapez HSA 7/8 – A 2

Gegeben ist ein gleichschenkliges Trapez ABCD mit $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$.

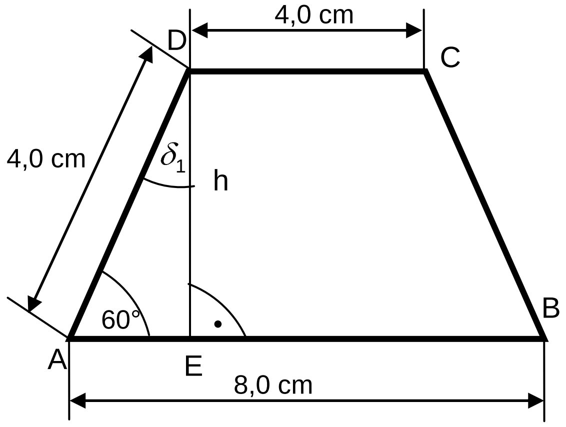


Abbildung nicht maßstäblich

a) Konstruiere das Trapez ABCD.
b) Max schaut sich das Trapez an und rechnet: 3 · 4 cm + 8 cm.
Erkläre, welche Größe Max berechnet hat.
c) E ist der Fußpunkt der Höhe h.
Berechne die Länge der Strecke $\overline{AE}$ und die Länge der Höhe h.
d) Berechne den Flächeninhalt vom Trapez ABCD.
e) Begründe, warum der Winkel δ_1 eine Größe von 30° hat.

Trapez HSA 7/8 – H 2

EINORDNUNG IN DAS KOMPETENZMODELL

Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen				**Allgemeine mathematische Kompetenzen**			
$a^2=5m^2$				P	M	A	D
	x			3		4	2

Kompetenz	**AFB I**	**AFB II**	**AFB III**
a) Trapez konstruieren	x		
b) Umfangsberechnung erkennen und erklären		x	
c) Länge von $\overline{AE}$ berechnen Höhe mithilfe des Satzes des Pythagoras berechnen	x	x	
d) Flächeninhalt berechnen		x	
e) Winkelgröße (δ_1 = 30°) begründen		x	

HINWEISE ZUR LÖSUNG

a) Geeignete Stücke auswählen und Trapez auf unliniertem Papier konstruieren

b) Umfangsberechnung erkennen und erklären

c) Länge von $\overline{AE}$ = 2 cm (halbe Differenz der Längen von $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$)

h ≈ 3,5 cm (Die Höhe h ist eine Kathete im rechtwinkligen Dreieck AED).

d) A ≈ 21 cm²

e) Es ist zu erwarten, dass auf die Innenwinkelsumme im Dreieck (rechtwinkliges Dreieck) als Begründungsansatz zurückgegriffen wird (180°– 90° – 60° = 30° bzw. 90° – 60° = 30°).

KOMMENTAR

Diese Aufgabe ist rein innermathematisch. Ihre Lösung erfordert nicht nur grundlegende inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen, sondern vor allem deren Vernetzung (z. B. bei der Ermittlung der Höhe und beim Begründen der Winkelgröße).

Die Abbildung enthält mehr Informationen als notwendig. So ist die Rechtwinkligkeit des Dreiecks AED bereits durch die Höhe festgelegt und das Winkelzeichen für den rechten Winkel überflüssig. Für das Zeichnen sind mehr Angaben gegeben, als erforderlich (überbestimmt). Die Schülerinnen und Schüler können selbst festlegen, auf welche Stücke sie zurückgreifen wollen.

Es wäre wünschenswert, dass der Umfangsbegriff, der Satz des Pythagoras und der Innenwinkelsatz ohne Tafelwerk angewendet werden können.

Die Aufgabe ist in Einzelschritte gegliedert, die bis auf die Berechnung des Flächeninhaltes unabhängig voneinander lösbar sind.

AUFGABENVARIATIONEN

Der Schwierigkeitsgrad der Aufgabe kann relativ leicht variiert werden (z. B. Höhe nicht einzeichnen; die Angabe weiterer Winkel; Weglassen der Skizze).

Umfang und Flächeninhalt können auch in einen Sachkontext eingebunden werden.

Eine Erweiterung ergibt sich, wenn das Trapez Grundfläche eines Prismas ist (Körperdarstellung und Körperberechnung).

Das Bild zeigt eine 10-Cent-Münze sowie eine 2-Euro-Münze.

Von diesen Münzen ist bekannt:

	10-Cent-Münze	2-Euro-Münze
Durchmesser	d_1 = 19,75 mm	d_2 = 25,75 mm
Dicke	1,93 mm	2,20 mm
Masse	4,10 g	8,50 g

a) In der Einführungsphase des EURO im Jahr 2002 wurden in Deutschland 810 Millionen 2-Euro-Münzen geprägt.
Berechne die Masse (in Tonnen) all dieser 2-Euro-Münzen.

b) Berechne das Volumen einer 10-Cent-Münze.
Berechne die Dichte (in $\frac{g}{cm^3}$) von 10-Cent-Münzen.

c) Der Grundriss einer 10-Cent-Münze und einer 2-Euro-Münze sind Kreise mit unterschiedlichen Durchmessern.
Es gibt zwei Lagemöglichkeiten, so dass die beiden Kreise genau einen Punkt gemeinsam haben.
Skizziere die beiden Lagemöglichkeiten der Kreise.

Münzen — HSA 7/8 – H 3

EINORDNUNG IN DAS KOMPETENZMODELL

Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen				Allgemeine mathematische Kompetenzen			
$a^2=5m^2$			E Ē	P	M	A	D
x	x			1	1		

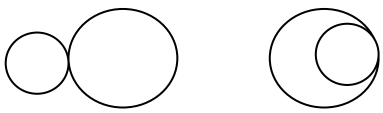
Kompetenz	AFB I	AFB II	AFB III
a) Masse in Sachsituation berechnen		x	
b) Volumen in Sachsituation berechnen Dichte in Sachsituation berechnen		x x	
c) Lagebeziehungen im Sachproblem erkennen und skizzieren			x

HINWEISE ZUR LÖSUNG

a) 6 885 t beträgt die Masse all dieser geprägten 2-Euro-Münzen.

b) Volumen der 10-Cent-Münze: $V = 0{,}591\ cm^3$; Dichte: $\rho = 6{,}94\ \frac{g}{cm^3}$

c) Die Lagebeziehung zweier Kreise soll erkannt und skizziert werden.



KOMMENTAR

Es werden räumliche Realobjekte Gegenstand mathematischer Modellierung, indem die Münzen als Zylinder erkannt werden müssen. Es besteht ein hoher Anspruch am inhaltlichen Durchdringen des Sachverhaltes und dem Herausfiltern der wesentlichen Informationen, die für die Berechnungen bedeutungsvoll sind. Beim Rechnen geht es um den Umgang mit großen Zahlen und um das sichere Umrechnen von Einheiten.

Auch im Aufgabenteil b) ist eine gründliche Textanalyse zum Erkennen der Lagebeziehung erforderlich. Von der räumlichen Vorstellung der Münzen (Zylinder) wird übergegangen in eine ebene Darstellung (Grundriss).

AUFGABENVARIATIONEN

Für das Üben solcher Aufgabenstellungen bieten sich Aufgaben mit verändertem Zahlenmaterial an.

Weiteres Zahlenmaterial

	1-Euro	**50-Cent**	**20-Cent**	**5-Cent**	**2-Cent**	**1-Cent**
Durchmesser	23,25 mm	24,25 mm	22,25 mm	21,25 mm	18,75 mm	16,25 mm
Dicke	2,33 mm	2,38 mm	2,14 mm	1,67 mm	1,67 mm	1,67 mm
Masse	7,50 g	7,80 g	5,74 g	3,92 g	3,06 g	2,30 g

Anzahl (in Milliarden) der in der Einführungsphase des EURO in Deutschland geprägten Münzen

1 Euro	**50-Cent**	**20-Cent**	**10-Cent**	**5-Cent**	**2-Cent**	**1-Cent**
1,7	1,6	1,6	3,3	2,3	1,8	3,7

Mögliche Aufgaben:

1. Berechne die Masse (in Tonnen) aller Münzen, die in Deutschland in der Einführungsphase insgesamt hergestellt wurden.
2. Wie hoch wäre ein „Turm“ von 2-Euro-Münzen, wenn man alle 810 Millionen Münzen übereinander stapeln würde?

   Gib das Ergebnis in einer geeigneten Einheit an.

Stromverbrauch HSA 7/8 – A 4

Familie Krüger möchte einen möglichst günstigen Vertrag mit ihrem Stromanbieter abschließen. Dazu vergleicht sie die verschiedenen Tarife.

Tarif 1 – Familienstrom
Jährliche Grundgebühr: 60 €
Preis je Kilowattstunde: 24 Cent

Tarif 2 - Jokerstrom
Jährliche Grundgebühr: 220 €
Preis je Kilowattstunde: 20 Cent

a) Ermittle rechnerisch die in der Tabelle fehlenden Werte.

Jahresverbrauch in kWh	1000	3000	5000
Tarif 1: Preis in €			
Tarif 2: Preis in €			

b) Stelle für beide Tarife den Zusammenhang zwischen dem Verbrauch und dem Preis in ein und demselben rechtwinkligen Koordinatensystem grafisch dar.
Hinweis: Wähle für den Verbrauch die „x-Achse“ und für den Preis die „y-Achse“.

c) Für welchen Tarif sollte sich Familie Krüger entscheiden, wenn ihr Verbrauch bei ca. 2500 kWh pro Jahr liegt? Begründe.

d) Erkläre, wie man den Verbrauch ermitteln kann, bei dem beide Tarife gleich günstig sind.

Stromverbrauch HSA 7/8 – H 4

EINORDNUNG IN DAS KOMPETENZMODELL

Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen				**Allgemeine mathematische Kompetenzen**			
$a^2=5m^2$			E Ē	**P**	**M**	**A**	**D**
		x			2		2

Kompetenz	**AFB I**	**AFB II**	**AFB III**
a) Preise gemäß einer Tarifbeschreibung berechnen		x	
b) Zusammenhang Verbrauch-Preis grafisch darstellen		x	
c) günstigen Tarif auswählen und begründen		x	x
d) Lösungsweg (Verbrauch für gleichen Preis bei beiden Tarifen ermitteln) erklären			x

HINWEISE ZUR LÖSUNG

a)

Verbrauch in kWh	1000	3000	5000
Tarif 1: Preis in €	300	780	1260
Tarif 2: Preis in €	420	820	1220

b) Diagramm: zweckmäßige Einteilung der Achsen, z. B. 1000 kWh ≙ 2 cm; 100 € ≙ 1 cm.

c) Tarif 1: Familienstrom

Begründung mithilfe der Tabelle – Preis von 1000 kWh und 3000 kWh ist billiger als bei Tarif 2, also muss es auch für 2500 kWh so sein

Begründung mithilfe des Diagramms – für 2500 kWh ist der Funktionswert bei Tarif 1 geringer

d) Erklärung kann mithilfe des Diagramms (Schnittpunkteigenschaft) oder mithilfe der ergänzten Tabelle erfolgen

KOMMENTAR

Diese Aufgabe erfordert nicht zwingend ein Formulieren der Berechnungsschritte oder gar ein Aufstellen einer Gleichung. Darauf sollte aber bei der Auswertung Wert gelegt werden. Wenn eine solche Vorschrift bekannt ist, stellt das Berechnen der Funktionswerte eine basale Kompetenz dar.

Die graphische Darstellung oder die Wertetabelle sollten dazu genutzt werden, um eine Begründung für die Lösung der Aufgabe c) zu geben.

Ebenso sollten bei d) beide Lösungswege (graphisch, Wertetabelle) in der Auswertung eine Rolle spielen.

AUFGABENVARIATIONEN

Ähnliche Aufgaben könnten zu weiteren praktischen Anwendungen wie Taxitarife, Handytarife angeboten werden.

Beispiel:

Susanne beabsichtigt, den Anbieter für ihren Internetzugang zu wechseln. Bei ihrem derzeitigen Anbieter A bezahlt sie eine monatliche Grundgebühr von 8 € und einen Minutenpreis von 5 ct. Beim Anbieter B würde sie eine monatliche Grundgebühr von 10 € und einen Minutenpreis von 4 ct zahlen.

a) Vervollständige die Tabelle.

Zeit t in min	100	150	200
monatl. Gebühren A in €			
monatl. Gebühren B in €			

b) Stelle für beide Tarife den Zusammenhang zwischen der Zeit und dem Preis in einem rechtwinkligen Koordinatensystem grafisch dar.

c) Vergleiche die Gebühren der beiden Anbieter bei einer Surfdauer von $2\frac{1}{2}$ h pro Monat.

d) Wie viel Minuten müsste Susanne monatlich surfen, um bei beiden Anbietern dieselbe Gebühr zu bezahlen?

Bei einer Verkehrskontrolle von 200 Fahrzeugen wurden folgende Mängel mit der angegebenen Häufigkeit festgestellt.

Mangel	Beleuchtung	Bereifung	Warndreieck	Verbandskasten	ohne TÜV/AU	sonstige Mängel
absolute Häufigkeit	38	22	4	10	4	2

a) Stelle die Ergebnisse der Verkehrskontrolle in einem Säulendiagramm dar.

b) Berechne, mit welcher relativen Häufigkeit bei allen kontrollierten Fahrzeugen Beleuchtungsmängel auftreten.

c) Monika analysiert die Tabelle und sagt: „*Genau* 80 Fahrzeuge haben Mängel.“
Unter welcher Bedingung ist Monikas Aussage zutreffend?

d) Erkläre mithilfe der Ergebnisse der Verkehrskontrolle, wie der Journalist zur Feststellung kommt, dass *drei Viertel* aller Mängel bei Beleuchtung und Bereifung auftreten.

> Aus einer Zeitungsmeldung
>
> ***Hauptmangel: Licht und Reifen***
> *Die gestern durchgeführte Verkehrskontrolle ergab, dass drei Viertel aller festgestellten Mängel bei Beleuchtung und Bereifung auftreten ...*

e) Bei einer anderen Verkehrskontrolle wurden in einer Stunde von 528 Fahrzeugen 33 zufällig ausgewählt und überprüft. Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Fahrzeug bei dieser Verkehrskontrolle überprüft wurde.

Erfahrungsgemäß beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass ein kontrolliertes Fahrzeug einen Mangel hat, 25 %. Berechne, mit wie viel mängelbehafteten Fahrzeugen demnach unter den 33 kontrollierten Fahrzeugen zu rechnen ist.

Verkehrskontrolle	**HSA 7/8 – H 5**

EINORDNUNG IN DAS KOMPETENZMODELL

Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen				**Allgemeine mathematische Kompetenzen**			
$a^2=5m^2$			E Ē	**P**	**M**	**A**	**D**
			x	1		2	2

Kompetenz	**AFB I**	**AFB II**	**AFB III**
a) Daten im Säulendiagramm darstellen	x		
b) Relative Häufigkeit berechnen	x		
c) Bedingung für Aussage erkennen		x	
d) Zeitungsmeldung erklären		x	
e) Wahrscheinlichkeit berechnen Wahrscheinlichkeit für Prognose anwenden		x	 x

HINWEISE ZUR LÖSUNG

a) Säulendiagramm

b) relative Häufigkeit: 0,19

c) Die Aussage ist nur zutreffend, wenn jedes Fahrzeug genau einen Mangel hat, das heißt, wenn die 80 festgestellten Mängel sich genau auf 80 Fahrzeuge verteilen.

d) Bei Beleuchtung und Bereifung traten insgesamt 60 Mängel auf. $\frac{60 \text{ Mängel}}{80 \text{ Mängel}} = \frac{3}{4}$

e) $P(A)=\frac{33}{528}=0{,}0625$

25 % von 33 sind 8,25

Es ist mit rund 8 mängelbehafteten Fahrzeugen zu rechnen.

KOMMENTAR

Diese Aufgabe beinhaltet eine Alltagsproblematik, wie sie nicht selten in Berichterstattungen vorkommt. Sie verlangt, Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik inhaltlich anzuwenden. Dem dienen insbesondere die Aufgabenteile c), d) und e). Solchen kritischen Hinterfragungen sollte gebührend Aufmerksamkeit geschenkt werden.

Die Aufgabe bietet darüber hinaus Substanz für das fächerübergreifende Arbeiten, insbesondere zum Thema „Sicher und gesund durch den Straßenverkehr“.

AUFGABENVARIATIONEN

Diese Aufgabe selbst kann vielfältig variiert werden.

a) z. B. Daten mithilfe eines Diagramms vorgeben

b) z. B. relative Häufigkeiten für das Auftreten weiterer Mängel oder Mängelgruppen berechnen lassen.

c) Andere Aussagen diskutieren lassen, z. B. „Mindestens 80 Fahrzeuge haben Mängel“

e) Wahrscheinlichkeit für andere Ereignisse berechnen, z. B., dass ein Fahrzeug bei einer Verkehrskontrolle nicht überprüft wird.

Wertvolle Variablen — HSA 7/8 – A 6

a) Berechne die Werte der Terme $T_1 = n^2$ bzw. $T_2 = (n + 1)^2$ für n = 1; 2; 3; 4; 5 sowie den Wert der Differenz $T_2 - T_1$.
Welche Regelmäßigkeit ist bei der Folge der Differenzen zu erkennen? Setze die Folge der Differenzen um zwei weitere Glieder fort und prüfe durch Nachrechnen.

b) Berechne den Wert des Terms $1{,}5\,m - \frac{m}{2} + 15$ für m = 1; 2 und 3.
Welche Zahl ist für m jeweils zu wählen, damit der Wert des Terms 21 bzw. 27 ist?

c) Gib zwei weitere Gleichungen an, die die Regelmäßigkeit der gegebenen vier Gleichungen fortsetzen.

$$2^2 - 1 = 1 \cdot 3$$
$$3^2 - 1 = 2 \cdot 4$$
$$4^2 - 1 = 3 \cdot 5$$
$$5^2 - 1 = 4 \cdot 6$$
………………

Schreibe die Gesetzmäßigkeit mithilfe der Variablen n auf.

Wertvolle Variablen — HSA 7/8 – H 6

EINORDNUNG IN DAS KOMPETENZMODELL

Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen				Allgemeine mathematische Kompetenzen			
$a^2=5m^2$				P	M	A	D
x				1	2		3

Kompetenz	AFB I	AFB II	AFB III
a) Termwerte und Differenzen berechnen	x		
Gesetzmäßigkeit erkennen und überrüfen		x	
b) Termwerte berechnen	x		
Variablenbelegungen ermitteln		x	
c) Regelmäßigkeit erkennen und die Gesetzmäßigkeit mit Variablen angeben		x	x

HINWEISE ZUR LÖSUNG

a)

n	1	2	3	4	5		6	7
T_1	1	4	9	16	25		36	49
T_2	4	9	16	25	36		49	64
$T_2 - T_1$	3	5	7	9	11		13	15

Die Differenzen sind aufeinanderfolgende ungerade Zahlen.

b)

m	1	2	3		6	12
T	16	17	18		21	27

c) $6^2 - 1 = 5 \cdot 7$; $7^2 - 1 = 6 \cdot 8$

$(n + 1)^2 - 1 = n \cdot (n + 2)$ für $n > 0$

KOMMENTAR

Die Aufgabe zielt insbesondere auf die Entwicklung von Kompetenzen im Umgang mit Termen ab, wobei nicht etwa technisch aufwändige Termumformungen im Fokus der Aufgabe stehen. Vielmehr wird elementares Berechnen von Termwerten verknüpft mit Aufträgen zum Beurteilen des Verhaltens elementarer Zahlenfolgen (hier soll der Schüler gedanklich das rekursive Fortschreiben der vorliegenden Folge vollziehen und dann überprüfen) wie auch dem Darstellen expliziter Bildungsvorschriften unter Verwendung von Variablen.

Im Aufgabenteil b) geht es nach dem Berechnen der ersten drei Termwerte nicht um das Fortsetzen des Berechnens, um auf diesem Wege schließlich die Lösung zu finden. Vielmehr sollten die Schüler überlegt „Startwerte“ auswählen. Die Überlegungen werden wesentlich vereinfacht, wenn der Term $1{,}5\,m - \frac{m}{2} + 15$ zu $m + 15$ zusammengefasst wird.

Bei c) muss darauf geachtet werden, dass je nach „Startwert“ für n die Beschreibung der Gesetzmäßigkeit unterschiedlich sein kann, z. B. für $n > 1$: $n^2 - 1 = (n - 1) \cdot (n + 1)$.

AUFGABENVARIATIONEN

Mögliche Variationen innerhalb des isolierten Berechnens von Termwerten leiten sich aus folgenden Überlegungen ab:

- *Struktur des Terms*
  - nur Grundrechenoperationen $1{,}5\,m - 15$; $1{,}5(m - 7) - 2(m + 7) + 15$
  - Einbinden von Potenzen $2\,m^2 - m + 1$; $(m - 3)^3 - (m - 7)^2$
  - Anzahl auftretender Variablen $3(a - 7) - (b - 7)$
- *verwendetes Zahlenmaterial* ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}_+$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$)

Mögliche Variationen innerhalb des isolierten Aufstellens von Termen oder Gleichungen:

- *„gängige“ Übersetzungen häufig auftretender Redewendungen (AFB I)*

  die Hälfte, ein Viertel von

  gerade Zahl, ungerade Zahl, Vorgänger, Nachfolger

  etwas vermehren bzw. vermindern

- *Verwenden „gängiger“ Übersetzungen beim Aufstellen von Gleichungen (AFB II)*

  Von welcher natürlichen (gebrochenen, ganzen, …) Zahl ist das Doppelte genauso groß wie ihr Quadrat?

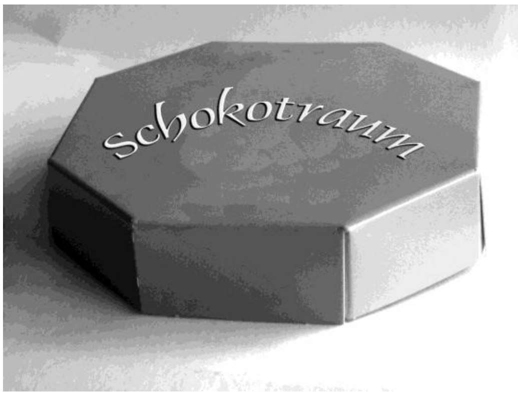
  Die Summe aus einer ungeraden Zahl und ihrem Nachfolger beträgt 23. Wie heißt die Zahl?

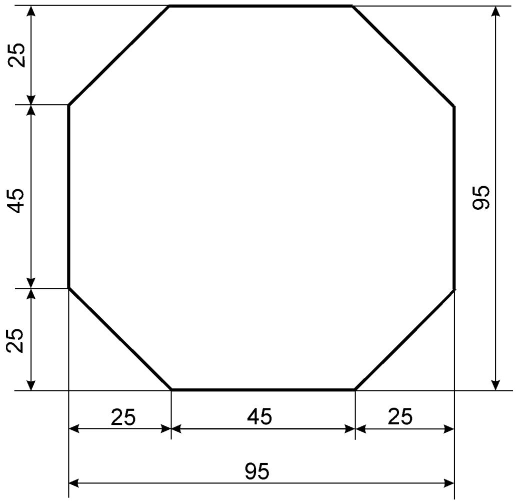
  Daniel kauft vier Flaschen Limonade zu einem Preis von je 1,20 € und zwei Flaschen Bananensaft. Dafür muss er an der Kasse 7,80 € bezahlen. Wie teuer war eine Flasche Bananensaft?

2.3.2 Schuljahrgang 9

Pralinenschachtel HSA 9 – A 1

Die Abbildung rechts zeigt den Grundriss einer Pralinenschachtel, die 25 mm hoch ist.





Maßangaben in mm

a) Zeichnen Sie einen zugehörigen Aufriss dieser Pralinenschachtel.

b) Berechnen Sie den Umfang des Grundrisses der Pralinenschachtel.

c) Die Pralinenschachtel hat die Form eines speziellen geometrischen Körpers.
Um welche Art eines geometrischen Körpers handelt es sich? Begründen Sie die Antwort.

d) In dieser Schachtel befinden sich vier Pralinen, die zusammen ein Volumen von rund 40 cm³ einnehmen.
Berechnen Sie, wie viel Prozent des Volumens der Pralinenschachtel zur Verpackung verwendet werden und diskutieren Sie das Ergebnis.

Pralinenschachtel HSA 9 – H 1

EINORDNUNG IN DAS KOMPETENZMODELL

Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen				**Allgemeine mathematische Kompetenzen**			
$a^2=5m^2$				P	M	A	D
	x			2	1	1	1

Kompetenz	AFB I	AFB II	AFB III
a) Aufriss zeichnen	x		
b) Umfang eines Achteckes berechnen		x	
c) Körperart erkennen und begründen		x	
d) Volumen und prozentualen Anteil berechnen sowie Ergebnis diskutieren			x

HINWEISE ZUR LÖSUNG

a) Aufriss der Pralinenschachtel, z. B. 45-mm-Seite parallel zur Rissachse

b) $u = 4 \cdot 45\text{ mm} + 4 \cdot s$ mit $s = \sqrt{25^2 + 25^2}\text{mm} \approx 35\text{ mm}$; $u \approx 32\text{ cm}$

c) Prisma; Begründung, z. B.: Grund- und Deckfläche sind zueinander kongruente Achtecke, die in zueinander parallelen Ebenen liegen.

d) z. B.: $V_{Quader} = (9{,}5\text{ cm})^2 \cdot 2{,}5\text{ cm}$; $V_{Ecken} = 2 \cdot (2{,}5\text{ cm})^2 \cdot 2{,}5\text{ cm}$; $V_{Schachtel} \approx 195\text{ cm}^3$

$$\frac{195 - 40}{195} \cdot 100\% \approx 79\ \%$$

Die Schüler sollten erkennen, dass nur rund ein Fünftel der Schachtel mit Pralinen gefüllt ist. Dies ist in zweierlei Richtung kritikwürdig: Zum einen wird der Kunde über den tatsächlich Inhalt getäuscht, zum anderen wird Verpackungsmaterial verschwendet.

KOMMENTAR

Verpackungen in Form von Prismen sind im Alltag häufig zu finden. Die Verbindung zwischen der Realität und der mathematischen Idealisierung wird durch das Foto und dem Grundriss hergestellt. Für das angestrebte Abschlussniveau sind Vernetzungen sowohl verschiedener inhaltsbezogener mathematischer Kompetenzen („Aufriss“, „Umfang“, „Satz des Pythagoras“, „Volumen“) als auch allgemeiner mathematischer Kompetenzen („Problemlösen“, „Modellieren“, „Begründen“, „Darstellen“) charakteristisch.

Die Diskussion des Ergebnisses aus Verbrauchersicht soll darüber hinaus sensibilisieren, Größenangaben kritisch zu beleuchten und sie in Beziehung zu anderen Erfahrungen oder Wissensbereichen unserer Gesellschaft zu setzen.

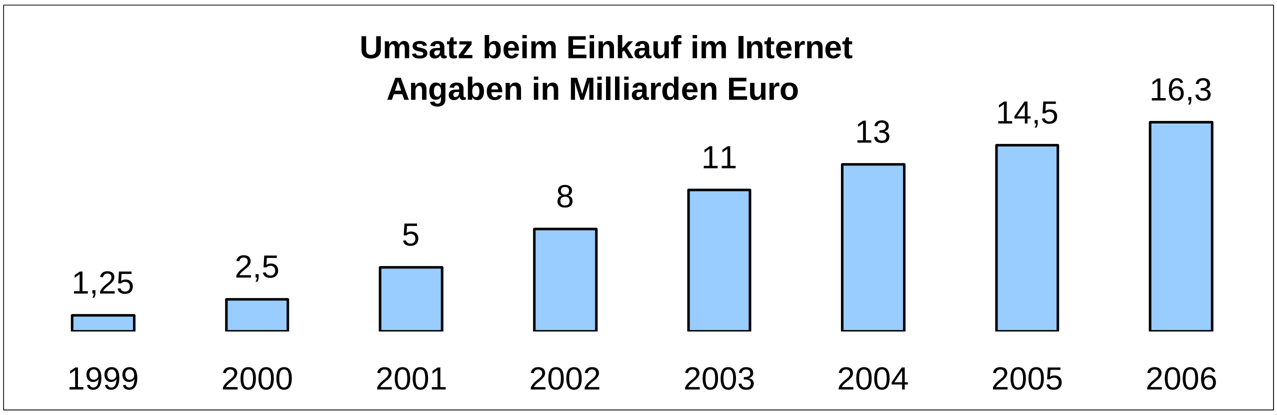
AUFGABENVARIATIONEN

Diese Aufgabe selbst kann ergänzt oder in den Anforderungen abgewandelt werden, z. B. Volumen der Pralinenschachtel vorab schätzen lassen, Angaben in cm vorgeben, Inhalt der Grundfläche berechnen lassen, verschiedene Wege bei der Volumenberechnung fordern.

Analoge Aufgaben sind durch Rückgriff z. B. auf andere Verpackungen (ein Gang durch einen Einkaufsmarkt mit „mathematischem“ Blick ist sehr hilfreich), Gebäudeformen oder Werkstücke möglich.

Internethandel HSA 9 – A 2

Der Handel über das Internet gewinnt an Bedeutung. In dem Diagramm sind die Umsatzzahlen in den Jahren von 1999 bis 2006 dargestellt.



(nach Mitteldeutscher Zeitung)

a) Wie viel Euro betrug der Umsatz im Jahr 2006?

Geben Sie diese Zahl in der Schreibweise mit abgetrennten Zehnerpotenzen an.

b) Berechnen Sie, um wie viel Prozent der Umsatz in den Jahren von 1999 bis 2006 gestiegen ist.

c) Zweimal in dieser Zeitspanne hat sich der Umsatz von einem Jahr zum folgenden Jahr auf 200 % erhöht.
Geben Sie diese Zeitabschnitte an.

d) Vom Jahr 2001 zum Jahr 2002 und vom Jahr 2002 zum Jahr 2003 ist der Umsatz jeweils um den gleichen Betrag gestiegen.
Entscheiden Sie, ob dies auch für die prozentuale Steigerung zutrifft.
Begründen Sie die Entscheidung.

Internethandel HSA 9 – H 2

EINORDNUNG IN DAS KOMPETENZMODELL

Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen				**Allgemeine mathematische Kompetenzen**			
$a^2=5m^2$				P	M	A	D
x				1		4	2

Kompetenz	AFB I	AFB II	AFB III
a) Umsatz aus grafischer Darstellung ablesen und mit abgetrennter Zehnerpotenz angeben	x		
b) Umsatz aus der grafischen Darstellung ablesen und „Steigerung um“ ermitteln		x	
c) Steigerung auf 200 % in der grafischen Darstellung erkennen und zugehörige Zeitabschnitte angeben		x	
d) Entscheidung treffen und diese begründen		x	

HINWEISE ZUR LÖSUNG

a) Umsatz im Jahr 2006: 16,3 Milliarden Euro; z. B. $16{,}3 \cdot 10^9$ €

b) Anstieg um 1204 %

c) von 1999 bis 2000 sowie von 2000 bis 2001

d) trifft nicht zu, da z. B. die entsprechenden Grundwerte unterschiedlich sind

KOMMENTAR

Die Aufgabe stellt grundlegende Anforderungen zur Prozentrechnung. Die Teilanforderungen werden mit einer gut überschaubaren grafischen Darstellung verknüpft. Aus dieser Darstellung sind aufgabenrelevante Informationen abzulesen, die dann beim Berechnen, Entscheiden und Begründen zur Anwendung kommen. In solchen Anwendungsfällen treten Größen nicht selten mit sehr kleinen bzw. sehr großen Zahlen auf. In diesem Zusammenhang sind Kompetenzen bedeutsam, die das Lesen und Darstellen derartiger Zahlen entwickeln.

AUFGABENVARIATIONEN

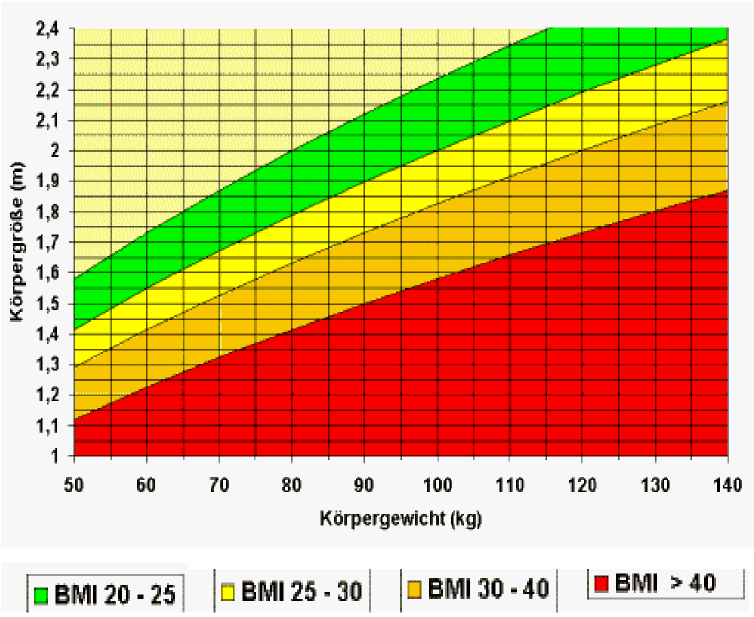
Der Presse können die verschiedensten Sachsituationen entnommen und in ähnlicher Weise aufbereitet werden. Im Unterricht ist die Berücksichtigung einer möglichst breiten Variation der Darstellungsformen und Sachverhalte lernfördernd.

Im Aufgabenbeispiel liegt die Frage nahe, wie sich der Umsatz des Internethandels entwickelt hat bzw. in den Folgejahren entwickeln wird (Prognosen).

Der Body-Mass-Index (BMI) ist ein Maß, mit dem man feststellen kann, ob man normalgewichtig ist.

Bedeutung des BMI-Wertes (nach http://www.diabetiker-hannover.de)	
kleiner als 20	Untergewicht
20 bis 24,9	Normalgewicht
25 bis 29,9	Übergewicht (langfristig abnehmen)
30 bis 39,9	starkes Übergewicht, Fettsucht (langfristig abnehmen, viel Bewegung, weniger Fett)
ab 40	krankhaftes Übergewicht, extreme Fettsucht (fachliche Hilfe zum Abnehmen erforderlich, kalorienarme Diät)

Body-Mass-Index



a) Sarah, die 1,70 m groß ist und 60 kg wiegt, beabsichtigt ihre Ernährung auf Diät umzustellen.
Beurteilen Sie die Sinnhaftigkeit dieser Absicht mithilfe des BMI-Diagramms.

b) Sarah informiert sich im Internet:

„...der Body-Mass-Index (BMI) wird als Quotient aus Körpergewicht (in kg) und Körpergröße (in m) im Quadrat bestimmt.“

Sarahs Vater ist 1,78 m groß und wiegt 103 kg. Sie wollen nun den BMI-Wert des Vaters berechnen. Dabei wählen sie verschiedene Rechenwege:

Rechnung des Vaters: $\text{BMI} = \left(\frac{103\,\text{kg}}{1{,}78\,\text{m}}\right)^2$; Rechnung von Sarah: $\text{BMI} = \frac{103\text{ kg}}{(1{,}78\text{ m})^2}$

Wer berechnet den Body Mass Index richtig? Begründen Sie.

c) Es wird folgende Funktionsgleichung betrachtet: $y = \frac{m}{k^2}$.

Stellen Sie folgende Abhängigkeiten mithilfe eines Tabellenkalkulationsprogrammes tabellarisch und grafisch dar:

$$(1)\ y = f(m) = \frac{m}{1{,}70^2} \quad \text{für } m = 50;\ 55;\ 60;\ \ldots;\ 100$$

$$(2)\ y = g(k) = \frac{60}{k^2} \quad \text{für } k = 1;\ 1{,}1;\ 1{,}2;\ 1{,}3;\ \ldots;\ 2{,}0$$

d) Beschreiben Sie das „Wachstumsverhalten“ der y-Werte im Fall (1) und im Fall (2) mit Worten.

Quelle: Diese Aufgabe ist dem Aufgabenbeispiel 4 der Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Hauptschulabschluss (Jahrgangsstufe 9) entlehnt.

Body-Mass-Index — HSA 9 – H 3

EINORDNUNG IN DAS KOMPETENZMODELL

Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen				Allgemeine mathematische Kompetenzen			
$a^2=5m^2$				P	M	A	D
		x		6		4	2

Kompetenz	AFB I	AFB II	AFB III
a) BMI aus grafischer Darstellung qualitativ entnehmen und deuten	x		
b) verbale Beschreibung in einen Term übersetzen		x	
c) Funktionen mithilfe eines Tabellenkalkulationsprogramms tabellarisch und grafisch darstellen		x	
d) Wachstumsverhalten für einen linearen und für einen nichtlinearen Fall mit Worten beschreiben			x

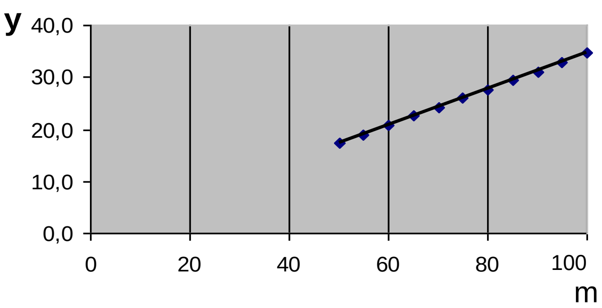
HINWEISE ZUR LÖSUNG

a) BMI liegt im Bereich 20 bis 24,9, d. h. Normalgewicht; keine Notwendigkeit für Ernährungsumstellung

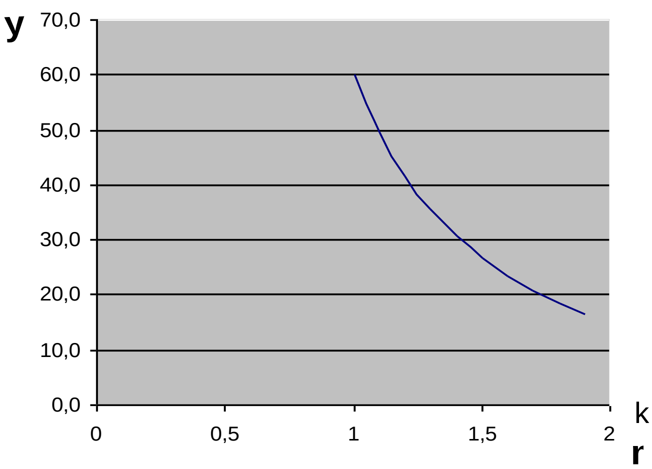
b) Sarahs Rechnung ist richtig, denn es ist der Quotient aus dem Körpergewicht und dem Quadrat der Körpergröße zu bilden.

c) z. B.:

Funktion (1)



Funktion (2)



d) z. B.:

(1) Je größer m, desto größer wird y, dabei ist y direkt proportional zum Körpergewicht m (lineares Wachstum).

(2) Je größer k, desto kleiner wird y, dabei ist y indirekt proportional zum Quadrat der Körpergröße k (nichtlineares Wachstum).

KOMMENTAR

Rein äußerlich erscheint diese Aufgabe durch den realen Sachhintergrund sehr umfangreich. Die Signalworte der Arbeitsaufträge „beurteilen“, „begründen“, „darstellen“ und „beschreiben“ erfordern deutlich wechselnde Anforderungen an das Lösungshandeln bei im Prinzip gleichem mathematischem Inhalt.

Dagegen ist die mathematische Substanz der Aufgabenteile a) und b) relativ elementar (Anwenden grundlegender Kompetenzen: Diagramm lesen, Termstrukturen erfassen). In den Aufgabenteilen c) und d) stehen Kompetenzen aus dem Inhaltsbereich „Zuordnungen und Funktionen“ im Mittelpunkt.

Die Aufgabe repräsentiert für diesen Bereich das angestrebte Abschlussniveau (vgl. auch Bildungsstandards).

Die Nutzung eines Tabellenkalkulationsprogrammes leistet einen expliziten Beitrag zur Entwicklung von Medienkompetenz. Die Aufgabe bietet auch die Möglichkeit, fächerübergreifend zu arbeiten.

AUFGABENVARIATIONEN

Durch Ergänzungen bzw. modifizierte Forderungen zu obiger Aufgabe ergeben sich Variationen, z. B.:

- Der Vater strebt wieder Normalgewicht an. Ermitteln Sie, wie viel Kilogramm er mindestens abnehmen muss.
- Stellen Sie für die Funktion (2) eine Wertetabelle auf und stellen Sie diese Funktion (2) auf Millimeterpapier grafisch dar.
- Entwickeln Sie einen BMI-Rechner mithilfe eines Tabellenkalkulationsprogramms (nach Eingabe von Körpergewicht und Körpergröße soll automatisch der BMI angezeigt werden).
- In welchem Bereich darf das Körpergewicht bei einem 1,80 m großen Menschen schwanken, um noch gemäß BMI-Festlegung als normalgewichtig zu gelten?

Bei der Body-Mass-Index Aufgabe ist der mathematische Kern das Änderungsverhalten einer Größe in Abhängigkeit von anderen beeinflussenden Größen, also das Wachstumsverhalten. Daher eignet sich im Prinzip jede derartig quantifizierbare Abhängigkeit. Im Fach Mathematik selbst bieten sich Formeln der Körperberechnung (z. B. $V = \pi r^2 \cdot h$) oder aus fächerübergreifender Sicht im Fach Physik z. B. die kinetische Energie $W_{kin} = \frac{1}{2}mv^2$ an. Darauf lassen sich die Aufgabenteile c) und d) unkompliziert übertragen.

Elementares – hilfsmittelfrei, schnell und richtig HSA 9 – A 4

Lösen Sie die folgenden Aufgaben ohne Taschenrechner und Tafelwerk.
Zeitvorgabe: 10 Minuten

Nr.	**Aufgabe**	**Lösung, Ergebnis, Antwort**
1	Berechnen Sie. a) 78 : 1000	
	b) $2{,}5 \cdot 0{,}3 \cdot 4$	
	c) $\frac{1}{5} - 2{,}2$	
2	a) 3 kg – 30 g = **x** kg	**x** = ……………
	b) 0,5 h = **y** s	**y** = ……………
	c) 3 % von 200 g sind **z** g.	**z** = ……………
3	Stellen Sie die Gleichung $\rho = \frac{m}{V}$ nach V um.	
4	Ein Rechteck hat die Seitenlängen x und y. Geben Sie eine Gleichung für den Umfang u und den Flächeninhalt A dieses Rechtecks an.	**u** = …………………………. **A** = ………………………….
5	In welcher Figur gibt es eine *Hypotenuse*?	
6	In einer Urne befinden sich 3 rote, 5 schwarze und 2 weiße Kugeln. Geben Sie die Wahrscheinlichkeit für das zufällige Ziehen einer weißen Kugel an.	
7	Geben Sie die Koordinaten des Punktes an, in dem der Graph der linearen Funktion mit der Gleichung $y = -3x - 2{,}5$ die y-Achse schneidet.	S_y(……..; ……..)

Elementares – hilfsmittelfrei, schnell und richtig HSA 9 – H 4

EINORDNUNG IN DAS KOMPETENZMODELL

Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen				**Allgemeine mathematische Kompetenzen**			
$a^2=5m^2$				**P**	**M**	**A**	**D**
x	x	x	x	3			

Kompetenz	**AFB I**	**AFB II**	**AFB III**
Basiskompetenzen	x		

HINWEISE ZUR LÖSUNG

1. a) 0,078 b) 3 c) –2,0
2. a) $x = 2{,}970$ b) $y = 1800$ c) $z = 6$
3. $V = \frac{m}{\rho}$
4. z. B. $u = 2x + 2y$; $A = x \cdot y$
5. im rechtwinkligen Dreieck
6. 0,2
7. $S_y(0; -2{,}5)$

KOMMENTAR

Die Aufgaben stellen ausschließlich basale Anforderungen, die von den Schülern durch unmittelbares Anwenden von sicher reproduzierbarem Wissen und Können schnell und korrekt gelöst werden sollten. Deshalb ist hier neben sachlicher Richtigkeit auch auf das Einhalten der Zeitvorgabe zu achten.

Die Zusammenstellung derartiger Aufgaben zielt sehr bewusst auf Vielfalt. Das bezieht sich zunächst auf das Berücksichtigen von inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzen aus allen vier Inhaltsbereichen. Ferner meint Vielfalt in diesem Zusammenhang, dass nicht nur das „formale Zahlenrechnen“ berücksichtigt werden sollte, sondern dabei auch inhaltliche Aspekte wie tieferes und inhaltliches Verständnis von Begriffen, Sätzen und Verfahren einbezogen werden. Beispiele dafür sind hier das bewusste Nutzen von Rechenvorteilen (wie bei Aufgabe 1b), der verständnisvolle Umgang mit Formeln (Aufgabe 4) und das Grundverständnis von Begriffen und Eigenschaften (Aufgaben 5 und 7).

AUFGABENVARIATIONEN

Variationsmöglichkeiten sind hier offenkundig.

Anregungen dazu geben auch die Aufgaben aus dem Pflichtteil 1 der besonderen Leistungsfeststellung, vgl. z. B. Bildungsserver Sachsen-Anhalt.

Bild- und Quellenverzeichnis

Bezeichnung	Quelle bzw. Urheber
im Abschnitt 1.2: Beispiel: Lohnt sich die Abkürzung?	Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss
in Aufgabe 5/6-A3: Foto	LISA
in Aufgaben RSA 7/8-A3 und HSA 7/8-A3: Foto	LISA
in Aufgaben RSA 7/8-A5 und HSA 7/8-A5: Foto	LISA
in Aufgabe RSA 9/10-A3: Kartenausschnitt	LISA; gestaltet mit der Topografischen Software TOP 50; Land Sachsen-Anhalt
in Aufgabe HSA 9-A1: Foto	LISA
in Aufgabe HSA 9-A3: Aufgabenbeispiel mit Abbildungen	Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Hauptschulabschluss (Jahrgangsstufe 9)